실험 시험 A (10점)

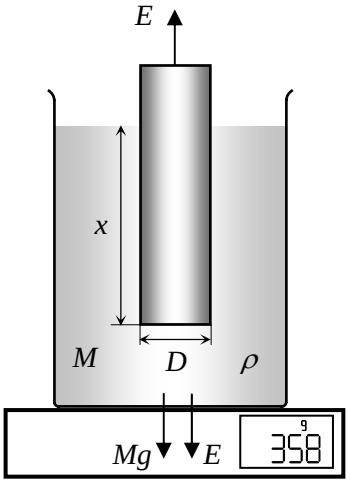
아르키메데스 원리. 액체의 밀도 측정.

실험 기구.

- 플라스틱 컵.
- 측정할 액체(사과 주스).
- 매다는 고리가 있는 플라스틱 원기둥.
- 원기둥을 매달기 위한 받침대와 수직 막대, 나사 막대와 연결관, 클램프 및 실.
- 디지털 저울.
- 접착테이프.
- 마커 펜과 자.

이론적 배경.

아르키메데스 원리에 따르면 *유체에 잠긴 물체에는 밀어낸 유체의 무게와 같은 크기의 부력이 위로 작용한다.*



그림의 실험에서 지름 D인 수직 원기둥을 길이 x만큼 액체에 담그면 밀어낸 부피는

$$V = \pi (D/2)^2 x .$$

따라서 위로 작용하는 부력은

$$E = \rho V g = \rho \pi (D/2)^2 g\, x ,$$

여기서 ρ 는 액체의 밀도이고 g는 중력 가속도이다.

이를 저울로 측정할 수 있다. 저울에 작용하는 총힘이 F이면 저울은 겉보기 질량 $M_{ap} = F/g$를 표시한다. 작용·반작용에 따라 저울이 받는 힘은 컵과 액체의 무게 Mg에 원기둥이 액체에 가하는 힘 E를 더한 것이므로, 겉보기 질량은 다음과 같다.

$$M_{ap} = M + \frac{E}{g} = M + \rho \frac{\pi D^2}{4} x .$$

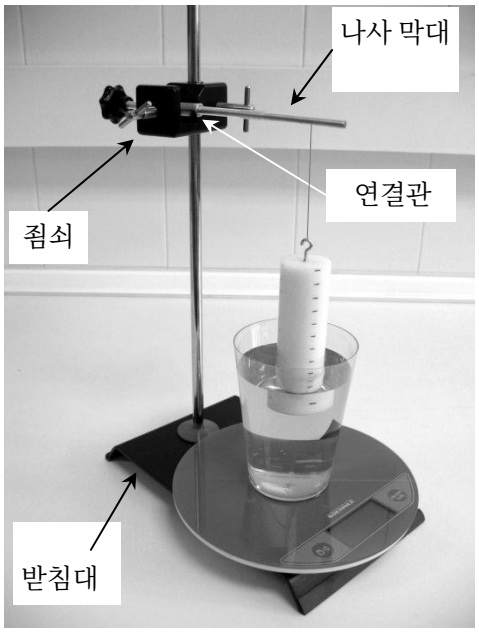
자료: 원기둥 지름: $D = (36{,}0 \pm 0{,}1)$ mm**.**

실험 과정.

잠긴 길이 x를 정확히 측정하려면 제공된 자와 마커로 원기둥 옆면에 눈금을 하나 이상 그려라.

받침대 위에 저울을 놓고 그 위에 컵을 놓아라. 나사 막대에 감은 실로 원기둥을 컵 중심 위에 매달아라. 실이 미끄러지지 않도록 끝을 테이프로 막대에 고정하여라.

사진처럼 육각 나사 연결관과 클램프를 사용하여 장치를 수직 막대에 고정하여라.



나사 막대를 돌려 실을 감거나 풀어 잠긴 길이 x를 조절할 수 있다.

원기둥이 바닥에 닿거나 액체가 넘치지 않고 적어도 x = 10 cm까지 잠기도록 처음 액체 높이를 정하여라.

측정을 시작할 때 컵을 저울에서 내리고 “ON”을 눌러라. 화면 위에 “g”가 표시되어 그램 단위인지 확인하고, 아니면 왼쪽 버튼을 눌러 맞춰라. 그다음 컵을 저울 중앙에 놓아라.

주의 사항 및 조언:

- 저울 아래에는 받침점 네 개가 있다. 올바른 측정을 위해 네 점 모두 동일한 수평면, 즉 받침대에 닿아야 한다.
- 원기둥이 컵의 벽에 닿거나 바닥을 건드리지 않게 하여라.
- 원기둥의 아랫면이나 옆면에 붙은 공기방울은 측정 오차를 일으킬 수 있다.
- 저울이 켜진 상태에서 오른쪽 “TARE” 버튼을 누르면 현재 상태를 새 질량 *기준*으로 정하고 화면을 0으로 만든다. 측정 중에는 기준을 바꾸면 안 되므로 “TARE”를 누르지 마라.
- 표시값이 약 4분 동안 변하지 않으면 저울이 자동으로 꺼진다. 이때 처음과 같은 조건에서 다시 켜야 영점이 같다. 문제를 피하려면 측정 사이에 오래 지체하지 말고 한 계열을 끝내는 것이 좋다.
- 전원을 끄려면 오른쪽 “OFF” 버튼을 몇 초 동안 눌러라.
- 시험이 끝나면 실험대를 처음처럼 깨끗이 정리하여라.
- **주의:** 컵을 넘어뜨려 액체를 쏟지 않도록 특별히 조심하여라. **앞선 실험 결과를 망칠 수 있다.**

문항.

a) 여러 x 값에 대해 저울의 겉보기 질량 M_{ap}를 기록하고 표로 제시하여라. (2점)

b) 측정점 (x, M_{ap})를 모눈종이에 그려라. (2점)

c) 측정점에 직선을 맞추어라. (2점)

d) 직선 맞춤으로 액체의 밀도 ρ 를 구하여라. (1점)

e) 원기둥 지름의 주어진 불확도 ΔD = 0,1 mm만 고려하여, 액체 밀도의 불확도 $\Delta\rho_D$를 계산하여라. (3점)

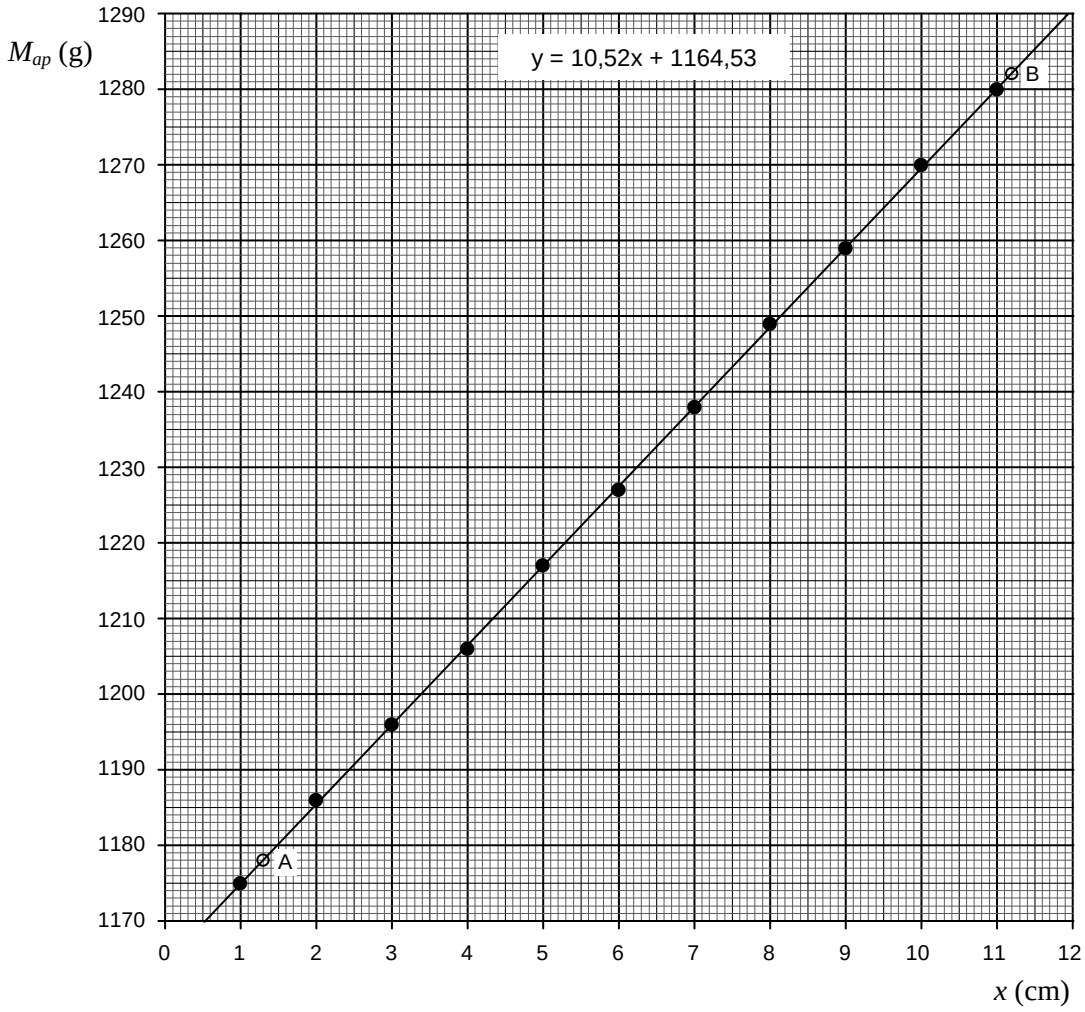
실험 시험 A

아르키메데스 원리. 액체의 밀도 측정. **해설**

a) 측정 표:

***x* (cm)**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
M_{ap} **(g)**	1175	1186	1196	1206	1217	1228	1238	1249	1259	1270	1280

b) 아래는 모눈종이에 그렸을 때와 비슷한 그래프이다. $x = 0$인 점은 눈으로 수면을 맞추는 방법 때문에 다른 점과 비교하여 상당한 계통적 편차가 생길 수 있어 제외한다.



c) 예상대로 측정점은 직선에 매우 잘 맞는다. 가장 잘 맞는 직선을 그린 뒤 멀리 떨어진 두 점의 좌표를 읽어 기울기를 수작업으로 구할 수 있다. 예를 들어 그림의 격자 교점 A, B의 좌표는 다음과 같다:

$$(x_A;\, y_A) = (1{,}30\,\text{cm};\, 1178{,}0\,\text{g})$$

$$(x_B;\, y_B) = (11{,}20\,\text{cm};\, 1282{,}0\,\text{g})$$

따라서 직선의 기울기는

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{104{,}0\,\text{g}}{9{,}90\,\text{cm}} \qquad \boxed{p = 10{,}51\ \text{g/cm} = 1{,}051\ \text{kg/m}}$$

최소 제곱법으로 해석적 맞춤을 해도 매우 비슷한 결과를 얻는다:

$$\boxed{p = 10{,}52\ \text{g/cm} = 1{,}052\ \text{kg/m}}$$

d) 문제의 모형에서 x에 대한 M_{ap} 그래프의 기울기는

$$p = \rho\frac{\pi D^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{4p}{\pi D^2}$$

마지막 기울기 값을 계산에 사용하면

$$\boxed{\rho = 1{,}034\,\text{g/cm}^3 = 1{,}034\times10^3\,\text{kg/m}^3}$$

e) 원기둥 지름은 $D = (36{,}0 \pm 0{,}1)$ mm로 주어져 불확도는 $\Delta D = 0{,}1$ mm이다. 밀도에 전파되는 불확도 $\Delta\rho_D$는 지름의 양 끝값으로 수치 계산할 수 있다.

$$D_{\min} = 3{,}59\ \text{cm} \qquad D_{\max} = 3{,}61\ \text{cm}$$

$$\Delta\rho_D = \frac{1}{2}(\rho_{\max} - \rho_{\min}) = \frac{2p}{\pi}\left(\frac{1}{D_{\min}^2} - \frac{1}{D_{\max}^2}\right) \qquad \boxed{\Delta\rho_D = 0{,}006\ \text{g/cm}^3}$$

밀도 식의 증분을 절댓값으로 취하면 더 정밀하지는 않지만 더 간결하게 같은 결과를 얻는다:

$$\rho = \frac{4p}{\pi D^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta\rho_D = 2\frac{4p}{\pi D^3}\Delta D = 2\rho\frac{\Delta D}{D} = 0{,}006\ \text{g/cm}^3$$

참고: 완전한 오차 분석에서는 맞춘 직선의 기울기 불확도 Δp와 밀도로 전파되는 오차 $\Delta\rho_p$도 고려한다. 그러나 점들이 매우 잘 정렬되어 최대·최소 기울기의 합리적인 직선으로 수작업 추정하기는 어렵다. 측정 분해능 $\Delta x \approx 1$ mm, $\Delta M_{ap} \approx 1$ g로 오차 막대를 추정하면 그 크기는 그래프의 점 반지름 정도로 작다. 또는 최적 직선을 그리고 A, B 좌표를 읽을 때의 작은 오차를 고려할 수 있다. 어느 경우든 세로 불확도를 작은 모눈 한 칸 정도로 추정할 수 있다.

$$\Delta(y_B - y_A) = 1\ \text{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = 0{,}09\ \text{g/cm}$$

해석적으로 계산한 기울기의 표준 오차는 $\varepsilon_p = 0{,}03$ g/cm이므로, 앞서 정한 Δp의 신뢰 수준은 95% 보다 매우 높다.

밀도는 기울기에 정비례하므로 상대 불확도는 다음과 같이 전파된다:

$$\Delta\rho_p = \rho\frac{\Delta p}{p} = 0{,}009\ \text{g/cm}^3$$

합계는 $\Delta\rho = \left(\Delta\rho_D^2 + \Delta\rho_p^2\right)^{1/2}$ $\Delta\rho = 0{,}011\ \text{g/cm}^3$

실험 시험 B (10점)

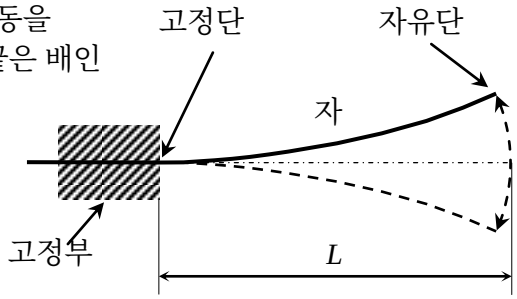
금속 자의 가로 진동.

실험 기구.

- 금속 자.
- 자를 고정하는 알루미늄 고정부.
- 장치를 책상에 고정하는 C형 클램프.
- 외부 전원 장치가 있는 스트로보스코프.
- 진동수 측정 기능이 있는 멀티미터.
- 검은 도화지.

이론적 배경.

이 실험에서는 금속 자의 자유 길이 L에 따른 가로 진동을 조사한다. 특히 그림처럼 고정된 끝은 마디이고 자유로운 끝은 배인 기본 진동 모드를 다룬다.



자의 진동수 f는 길이에 따라 다음과 같이 변할 것으로 예상한다.

$$f = K L^n , \qquad (1)$$

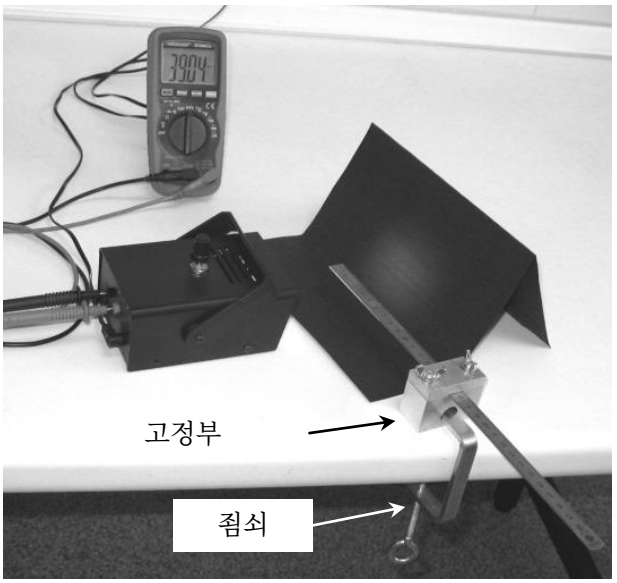
여기서 n은 정수 또는 반정수이며, K는 자의 재질과 가로 단면 치수에 의존하는 상수이다.

목적은 L에 따른 f를 측정하여 n과 K를 구하는 것이다.

실험 과정.

알루미늄 고정부는 자의 자유 길이 L을 조절하여 고정한다. 위쪽 나비너트 두 개를 풀고 자를 필요한 길이로 민 뒤 다시 조여라.

사진처럼 C형 클램프로 알루미늄 고정부를 책상 가장자리에 고정하여라.



자의 진동은 너무 빨라 주기를 손으로 재기 어렵다. 따라서 조절 가능한 진동수 F로 매우 짧은 빛을 주기적으로 내는 *스트로보* 조명을 사용한다. $F = f$이면 연속된 섬광이 자를 같은 위치에서 비추므로 정지한 것처럼 보인다.

F가 f의 약수 배일 때도 자는 정지한 것처럼 보인다. 즉, $F = f/2,\ f/3,\ f/4...$ 이는 섬광 사이에 자가 2, 3, 4…번 완전히 진동하기 때문이다. 반대로 F가 f의 정수 배인 $F = 2f, 3f...$ 경우, 자는 진동 중 2, 3…개 위치에 정지한 것처럼 보인다.

위쪽의 10회전 가변 저항기로 스트로보스코프 진동수 F를 조절하고, 멀티미터 선택 스위치를 "Hz"로 하여 측정한다. 탐침 두 개를 뒤쪽의 검정·빨강 단자에 연결하여라.

전원 장치를 전원 콘센트에 연결하고 12 V 출력을 스트로보스코프 뒤쪽에 연결하여라.

대비를 높이기 위해 자의 모서리를 확산 백색으로 칠해 놓았다. 어두운 배경으로 관찰하는 것이 좋다. 사진처럼 검은 도화지를 접어 스트로보스코프 반대쪽에서 자의 아래와 뒤에 놓아라.

자료: 99,99 Hz 이하 범위에서 진동수계의 정확도는 표시값의 ±1,5%이다.

설명 및 조언:

- 실제 자의 진동은 감쇠하므로 진폭이 점점 줄어 평형 위치에서 멈춘다. 따라서 F와 f가 같아도 완전히 정지해 보이지 않고 평형 위치로 천천히 접근한다.

- 알루미늄 고정부의 아래쪽 홈에 자를 올바르게 끼워라. 위아래 부분을 평행하게 하여 자의 전체 폭을 균일하게 고정하여라.

- 알루미늄 고정부가 진동하지 않도록 C형 클램프로 단단히 고정하여라.
- 측정하지 않을 때는 과열되거나 다른 참가자를 방해하지 않도록 스트로보스코프 전원을 꺼라.

- 멀티미터는 몇 분 뒤 자동으로 꺼진다. 다시 켜려면 노란 "Mode" 버튼을 눌러라.

문항.

a) 자유 길이 L = 14,0 cm에서 자가 한 위치 또는 두 위치에 정지해 보이는 모든 섬광 진동수 F_1, F_2, F_3…를 찾아 기록하여라. 약 6–50 Hz의 전체 범위를 조사하여라. 이 중 자의 실제 진동수 f는 무엇인가? (2점)

b) L_{min} = 10,0 cm부터 L_{max} = 22,0 cm까지 길이 L에 따른 진동수 f를 측정하여라. (2점)

c) 적절한 그래프와 맞춤을 이용하여 식 (1)의 지수 n을 구하여라. (2점)

d) n이 정수 또는 반정수여야 함을 고려하여, 적절한 그래프와 맞춤으로 상수 K를 구하여라. (2점)

e) K의 불확도를 추정하여라. (2점)

실험 시험 B

금속 자의 가로 진동. 해설

a) L = 14,0 cm에서 낮은 섬광 진동수부터 올리면 다음 진동수에서 자가 정지해 보인다.

$$F_1 = 7{,}17 \text{ Hz}, \quad F_2 = 10{,}72 \text{ Hz}, \quad F_3 = 21{,}45 \text{ Hz}.$$

두 개로 보이는 진동수는

$$F_4 = 42{,}98 \text{ Hz}.$$

예상대로 네 값은 대략 1/3 : 1/2 : 1 : 2의 비를 따른다. 따라서 이 길이에서 자의 진동수는 $f = F_3 = 21{,}45$ Hz이다.

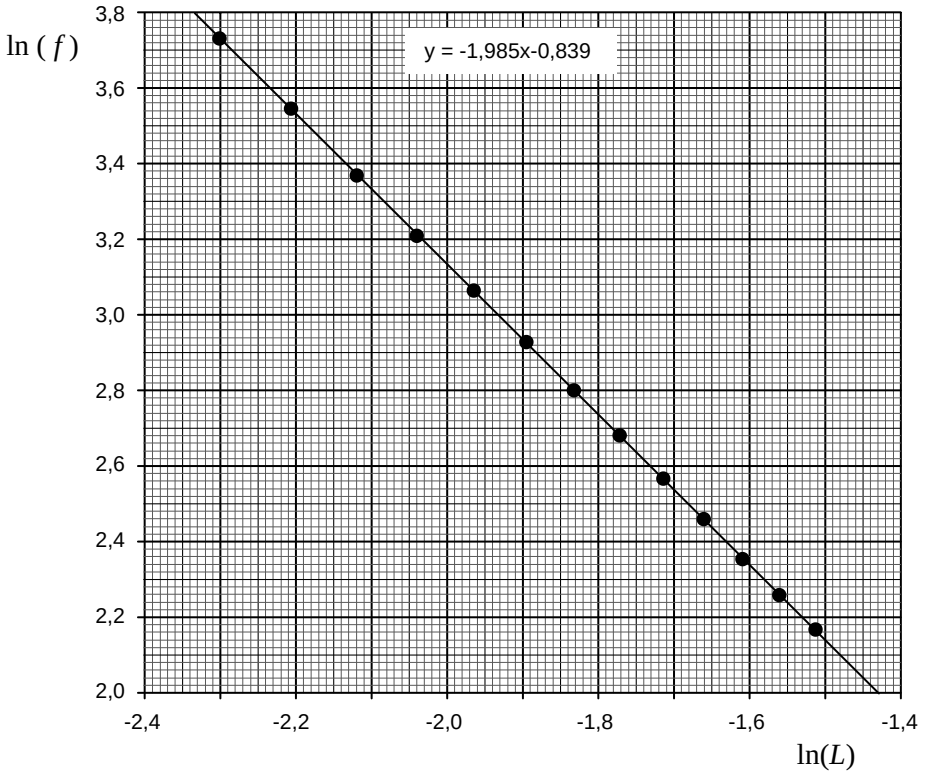
b) 다음 표에는 L에 따른 f의 계통적 측정값과 뒤에서 필요한 값들이 있다.

L (m)	0,100	0,110	0,120	0,130	0,140	0,150	0,160	0,170	0,180	0,190	0,200	0,210	0,220
f (Hz)	41,76	34,70	29,03	24,75	21,42	18,71	16,47	14,59	13,04	11,70	10,53	9,56	8,74
$\ln(L)$	-2,303	-2,207	-2,120	-2,040	-1,966	-1,897	-1,833	-1,772	-1,715	-1,661	-1,609	-1,561	-1,514
$\ln(f)$	3,732	3,547	3,368	3,209	3,064	2,929	2,802	2,680	2,568	2,460	2,354	2,258	2,168
$1/L^2$ (m^{-2})	100,00	82,64	69,44	59,17	51,02	44,44	39,06	34,60	30,86	27,70	25,00	22,68	20,66

c) 식 (1)에 밑이 임의인 로그를 취하면 선형화된다:

$$\ln(f) = \ln(K) + n\ln(L) \qquad (2)$$

따라서 구하는 n은 $\ln(f)$ 대 $\ln(L)$ 그래프의 기울기이다. 다음은 모눈종이에 작게 그렸을 때와 비슷한 그래프이다.



예상대로 점들이 잘 정렬된다. 최소 제곱법의 기울기는 $p = -1{,}985$이므로 구하는 정수 또는 반정수 지수는 명백히

$$\boxed{n = -2}$$

즉, f와 L의 관계는

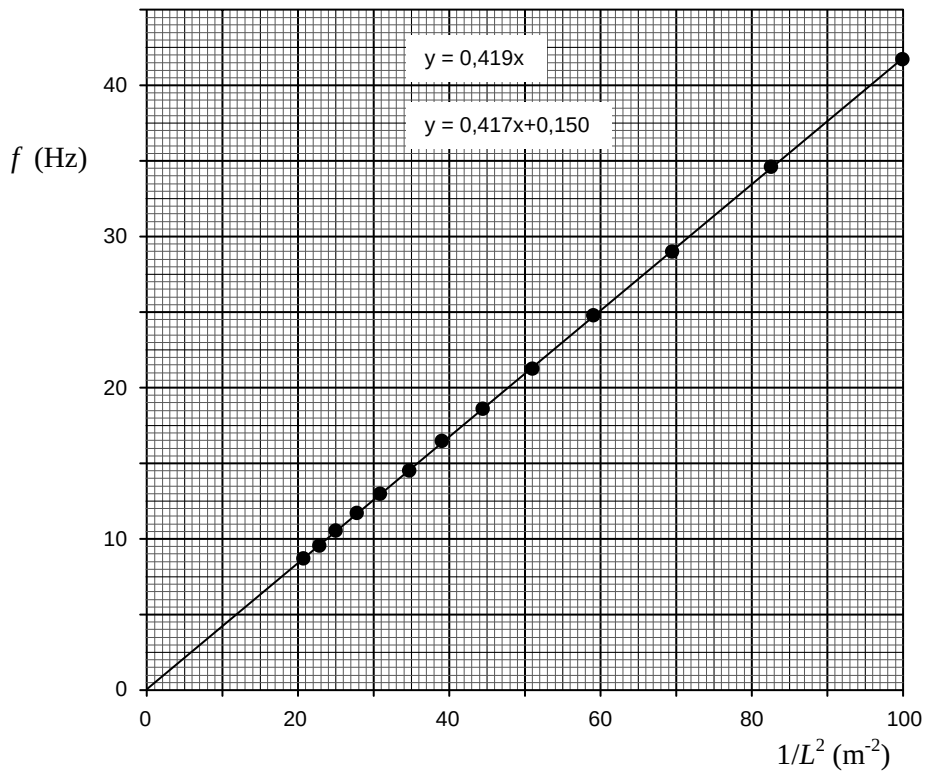
$$f = \frac{K}{L^2} \qquad (3)$$

d) 식 (2)에 따라 앞선 직선 맞춤의 세로 절편을 이용하면 K의 첫 근삿값을 얻는다.

$$\ln(K) = -0{,}839 \qquad \Rightarrow \qquad K = 0{,}432\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

이 맞춤의 n은 -2에 가깝지만 정확히 같지는 않으므로 K에 작은 편차가 생긴다.

이론 모형으로 돌아가 $n = -2$, 즉 식 (3)을 가정하는 것이 더 정확하다. K는 f 대 $1/L^2$의 기울기이다. 다음 그래프의 측정점은 원점을 지나는 직선에 매우 잘 맞고 기울기는 $p = 0{,}419\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$이다. 절편도 자유롭게 맞추면 유효숫자 세 자리에서 거의 같은 $p = 0{,}417\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$을 얻는다.



첫 맞춤은 제시한 모형에 부합하므로 더 신뢰할 수 있다고 보면 구하는 상수는

$$\boxed{K = 0{,}419\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}}$$

e) 상수의 불확도 ΔK는 앞선 그래프의 기울기 불확도와 같다. 수작업으로는 측정점에 합리적으로 맞는 최대·최소 기울기의 직선을 그린다. 최적 직선에 대한 산포가 거의 없으므로(기울기 표준 오차 $\varepsilon_p = 0{,}0006\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, 단 0,14%) 각 점의 불확도, 즉 오차 막대를 추정해야 한다.

가로축에서 $1/L^2$의 절대 및 상대 불확도는 다음과 같다.

$$\Delta\left(\frac{1}{L^2}\right) = 2\frac{\Delta L}{L^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta\left(1/L^2\right)}{1/L^2} = 2\frac{\Delta L}{L}$$

길이 L의 불확도를 다소 보수적으로 $\Delta L = 0{,}5\,\mathrm{mm}$로 추정하면, 상대 백분율 오차 $100\Delta L/L$은 L = 10 cm에서 0,5%, L = 22 cm에서 0,23%이다. $1/L^2$에 전파되는 상대 오차는 두 배이므로 $1/L^2$의 최댓값에서 1 %, 최솟값에서 0,5%이다. 이 오차들은 무작위일 것으로 예상되어 기울기에 미치는 영향은 1%보다 작다.

세로축 진동수 f의 불확도는 진동수계 정확도 1,5%로 직접 주어진다. 부정확한 기기 보정에 의한 편차는 계통적이다.

전체적으로 기울기, 따라서 상수 K의 불확도를 약 2%로 추정할 수 있으므로

$$\boxed{\Delta K = 0{,}008\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}}$$

상수 K에 대한 참고:

이 상수는 다음과 같음을 보일 수 있다.

$$K = 0{,}1615\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\,b$$

여기서 Y와 ρ 는 각각 재료의 영률과 밀도이며, b는 자의 두께이다.

이 실험의 자는 강철이며

$$Y \approx 2{,}1\times10^{11}\,\mathrm{Pa}$$

$$\rho \approx 7{,}8\times10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}$$

$$b = 0{,}50\ \mathrm{mm}$$

이를 대입하면

$$K \approx 0{,}42\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

실험 결과는 이 값과 매우 잘 일치한다.