실험 문제: 러더퍼드 산란

이베로아메리카 물리 올림피아드

2022

1. 서론

19세기 말에서 20세기 초에 원자의 구성을 연구하기 시작하였다. 조지프 존 톰슨 경이 모든 물질에 존재하는 매우 작고 가벼운 음전하 입자인 전자를 발견한 뒤 원자 구조 모형들이 제안되었다. 원자는 전기적으로 중성이므로 전자의 음전하와 같은 크기의 양전하도 있어야 했다.

주요 모형 중 하나는 윌리엄 톰슨이 J.J. 톰슨의 지지와 함께 제안한 톰슨 모형(1900)이었다. 균일한 양전하 덩어리에 전자가 박혀 있다는 모형으로, 균일한 푸딩 속 건포도에 빗대어 *건포도 푸딩* 모형이라고 불렀다.

*러더퍼드 산란 실험*은 어니스트 러더퍼드가 톰슨 모형이나 당시의 다른 모형이 원자를 올바르게 설명하는지 알아보기 위해 구상하였다. 전하를 띤 입자를 표적에 쏘아 표적 원자와 쿨롱 힘으로 상호작용할 때 어떻게 산란되는지 관찰하는 실험이다.

러더퍼드 실험은 그의 지도 아래 어니스트 마스든과 한스 가이거가 1908년부터 1910년까지 수행한 일련의 실험으로 실현되었다. 최종 실험에서는 라돈-222의 방사성 붕괴에서 나온 알파 입자를 조준기로 가늘게 모아 두께 2 μm의 금박에 쏘았다. 알파 입자가 닿으면 빛나는 형광 스크린으로 산란을 관찰하였다. 입자 방출원, 금박, 스크린은 모두 공기를 빼서 진공으로 만든 밀폐 관 안에 놓았다.

러더퍼드는 실험 결과를 바탕으로 새로운 모형인 러더퍼드 모형(1911)을 제안하였다. 작고 무거운 양전하 핵 주위를 전자가 태양 주위 행성처럼 돈다는 모형이므로 *원자의 행성 모형*이라고도 불렀다.

2. 실험 장치

매우 얇은 금박에 알파 입자 10^8개를 쏘는 상황을 모의실험한다. 빔의 단면적은 1 mm^2이고, 경로들은 완전히 평행하지만 중심에서 떨어진 거리는 무작위이다(그림 1). 에너지 5.5 MeV인 입자가 두께 10^{-6} m의 금박에 수직으로 입사한다.

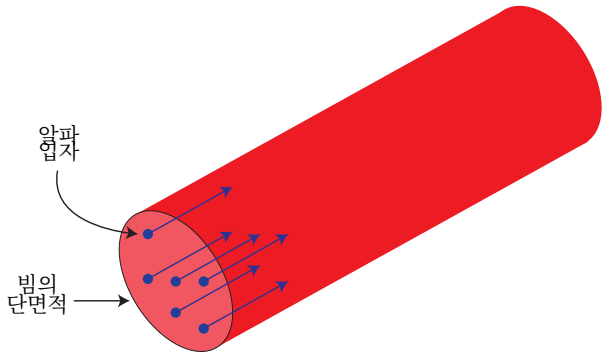


그림 1: 알파 입자 빔. 모든 입자의 운동 에너지가 같고 경로는 평행하다. 각 경로와 빔 중심 사이의 거리는 무작위이다.

모의실험에서는 각 입자가 표적 물질과 일으키는 상호작용을 고려하여 표적에 도달할 때의 경로를 정한다.

입사 빔에서 각 Θ만큼 산란된 알파 입자의 수를 검출기로 센다. 검출기의 원형 유효 면적은 4 cm^2 이며, 빔의 충돌점을 중심으로 한 원 위를 움직인다. 각도는 0°에서 135°까지 15° 간격으로 바꿀 수 있다 (그림 2).

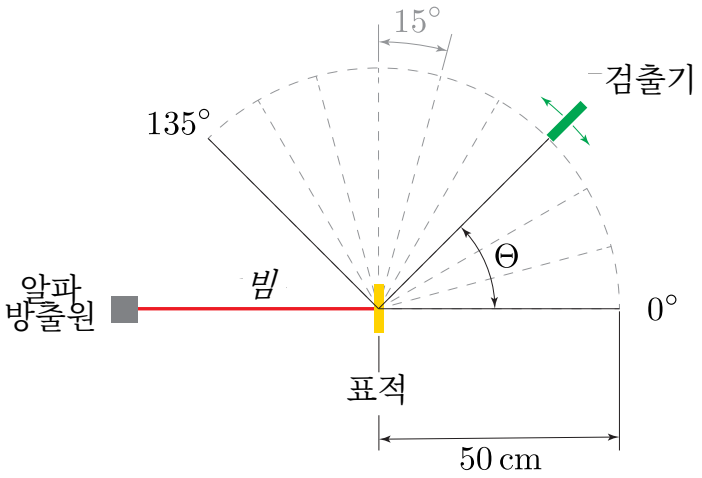


그림 2:러더퍼드 산란: 모의실험 장치.

설치 없이 웹 브라우저에서 모의실험에 접속할 수 있다. 올림피아드 Moodle 페이지에서 주소를 찾거나 다음 링크를 눌러라:

러더퍼드 산란 시뮬레이터.[1]

−와 + 버튼으로 검출기 각도를 선택한다. 각도는 그림과 두 버튼 사이의 숫자로 표시된다. 원하는 각도를 정한 뒤 ▸를 누르면 모의실험이 실행되어 계수를 얻는다. 같은 각도에서 다시 실행하려면 ▸를 한 번 더 누르면 된다.

"지우기"는 마지막 계수만 삭제하므로 ▸를 눌렀을 때 새 계수가 나왔는지 혼동할 경우에 유용하다. "초기화"는 모의실험의 모든 값을 처음 상태로 되돌린다.

3. 실험 절차

시뮬레이터로 다음을 수행하여라.

1. 가능한 모든 검출기 각도에서 산란 입자 수를 측정하여라.

2. 검출기 계수를 각도의 함수로 반로그 그래프에 나타내어라. 각도 불확도는 무시하여라.

4. 러더퍼드 모형

러더퍼드는 모든 양전하가 매우 작고 무거운 핵에 모여 있다고 보았다. 전자는 매우 작으므로 원자 부피 대부분은 비어 있으며, 입자 대부분은 상호작용 없이 통과한다. 핵 가까이 지나는 입자는 쿨롱 척력으로 산란된다. 그림 3은 알파 입자의 *쌍곡선* 경로이다. 입사 직선과 핵을 지나는 평행선 사이의 거리는 b이며, 입자는 핵에 최소 거리 r까지 접근한 뒤 멀어진다. 최종 방향은 원래 방향과 각 Θ를 이룬다. 핵전하와 입사 입자 수에 대한 비례 관계를 고려하여 러더퍼드는 각 Θ에서 예상되는 입자 수 I의 식을 얻었다.

[1] 전체 주소: https://oibf-2022.gofisica.org/U2FsdGVkX19tLoU3wB4bwMEQzQZH3HhQVzpN0pcjTZJfNUAX8q3Fb4TUZyHQ-qZx/main_es.html

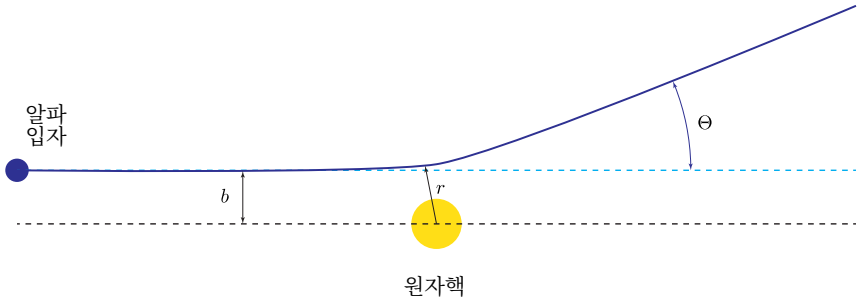


그림 3: 러더퍼드 모형. 원자핵 가까이를 지나는 알파 입자가 전기적 척력을 받아 그리는 쌍곡선 경로.

$$I = I_0 N_x \left[\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4E}\right]^2 \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)}\Delta\Omega. \qquad (1)$$

여기서:

Z_1: 알파 입자(헬륨 핵)의 원자 번호 Z. $Z_1 = 2$.
Z_2: 금의 원자 번호 Z. $Z_2 = 79$.
e: 기본 전하량. $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C.
ε_0: 진공 유전율. $\varepsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m.
E: 입사 빔 입자의 에너지.
$\Delta\Omega$: 검출기가 차지하는 입체각.
N_x: 단위 면적당 산란 핵의 수.
I_0: 입사 입자 수.

4.1. 러더퍼드 함수 맞춤

식 (1)은 다음 형태이다.

$$I = \frac{k}{\sin^n(\Theta/2)}$$

모의실험 자료를 이 함수에 맞추어라. 각도의 불확도는 무시하여라.

1. k를 구하여라.
2. n을 구하여라.

3. 러더퍼드 모형으로 산란 입자의 거동을 설명할 수 있는가?
간단히 논의하라.

4.2 원자핵 반지름 추정

모의실험 자료와 다음 쌍곡선 경로 식으로 원자핵 반지름의 가능한 가장 작은 상한을 구하여라.

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2E}\sqrt{\frac{1+\cos\Theta}{1-\cos\Theta}}$$

$$r = \frac{b\cos(\Theta/2)}{1-\sin(\Theta/2)}$$

b는 *충돌 매개변수*이다. 각도의 불확도를 무시하지 마시오.

실험 문제 해설

이베로아메리카 물리 올림피아드 2022

3. 실험 절차 (6점)

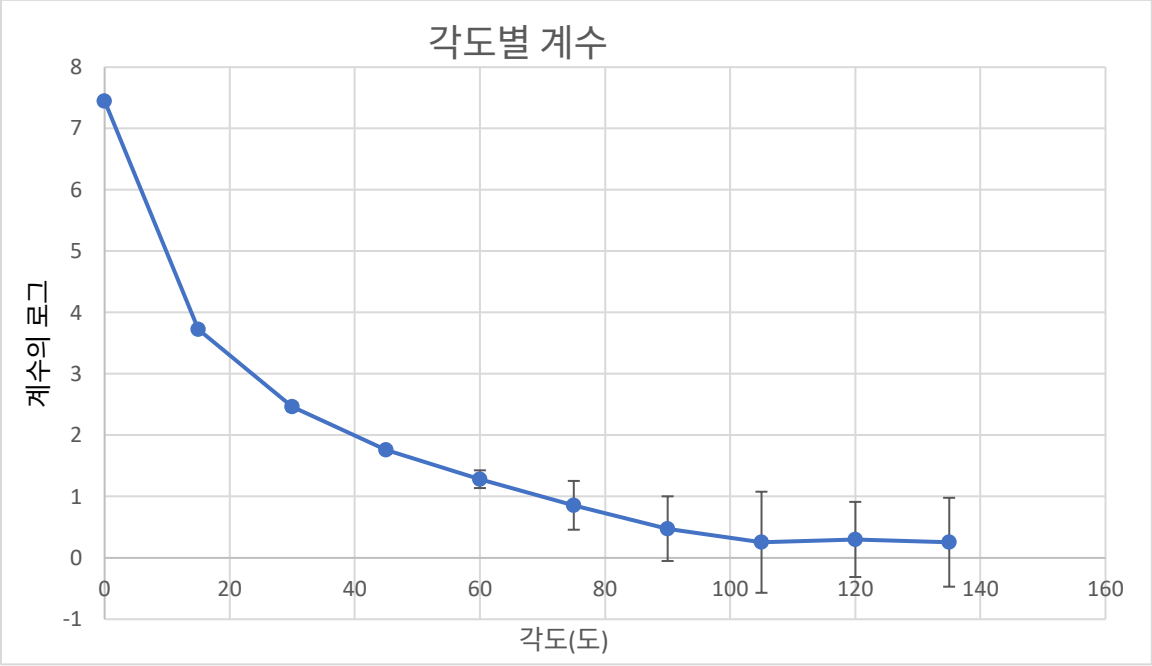
1. *이 실험에서 가능한 모든 검출기 각도의 산란 입자 수를 측정하라.* ***(3점)***

   각도마다 적어도 5회 측정하여 평균과 불확도를 구한다. 불확도에는 표준편차 또는 평균의 편차를 사용할 수 있다. 평균의 편차는 표준편차를 측정 횟수로 나눈 값이다.

2. *측정값을 이용해 검출기의 입자 계수를 각도의 함수로 나타낸 그래프를 반로그 눈금으로 그려라. 각도에 대한 불확도는 무시하라.* ***(3점)***

   평균 계수의 자연로그 $Z = \ln I$를 사용하고,
   다음 식으로 불확도를 전파한다.

$$\Delta Z = \frac{\Delta \mathrm{I}}{I}$$



4.1 러더퍼드 함수 맞춤 (11점)

1. k를 구하여라. ***(4점)***

여러 가지 방법으로 적합할 수 있다. 한 가지 예로 다음 식을 쓴다:

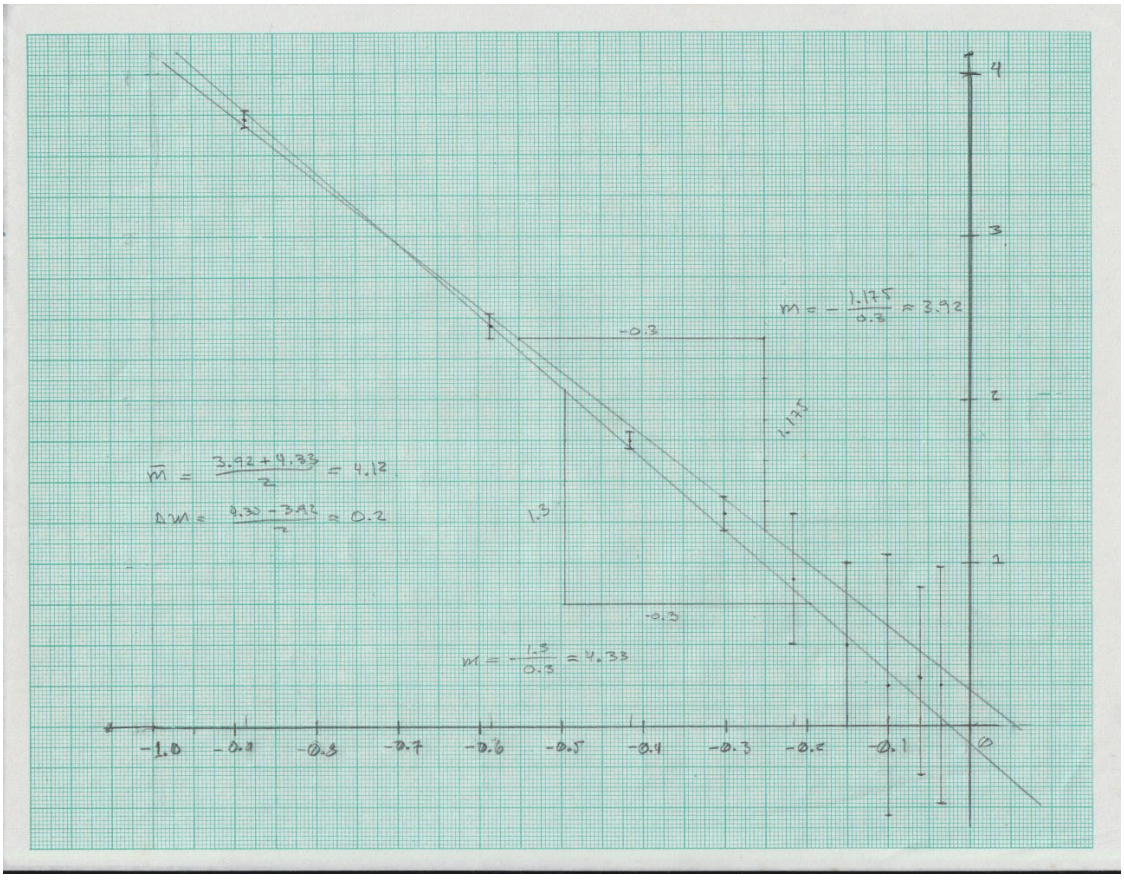
$$\ln I = \ln k - n \ln[\sin(\Theta/2)]$$

모눈종이에 점들을 그리고, 불확도 안에서 대부분의 점을 지나는 두 직선을 그리면 $k \approx 1.1$, $\Delta k \approx 0.2$를 얻는다. k의 단위는 계수이거나 무차원이다.

2. n의 값을 구하라. ***(5점)***

앞 항과 같은 방법으로 $n \approx 4.1$, $\Delta n \approx 0.2$를 얻는다.

아래는 그래프의 예이다. x축에는 $\sin(\Theta/2)$를 표시하므로 기울기는 음수이다.



3. 러더퍼드 모형으로 산란 입자의 거동을 설명할 수 있는가? 간단히 논하라. ***(2점)***

앞 항에서 얻은 지수 $n = 4.1 \pm 0.2$는 러더퍼드의 예측과 일치하므로, 이 모형은 관찰된 산란 입자의 거동을 설명한다.

4.2 원자핵 반지름 추정 (3점)

다음 식으로 원자핵 반지름의 가능한 가장 작은 상한을 구하려면,

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2E}\sqrt{\frac{1+\cos\Theta}{1-\cos\Theta}}$$

$$r = \frac{b\cos(\Theta/2)}{1-\sin(\Theta/2)}$$

주어진 값과 계수가 검출된 최대 각도인 Θ=135°에서 식을 계산한다.

각도 불확도에는 검출기의 원형 유효 면적 4 cm^2와 산란 중심에서 거리 50 cm를 고려한다. 이로부터 각도 구경은 2.58°이고, 각도는 133.71°부터 136.29°까지 변한다.

이 한계에서 r 값을 구하면:

$b(133.71°) \approx 8.8882 \times 10^{-15}$ m, $r(133.71°) \approx 4.3405 \times 10^{-14}$ m

$b(136.29°) \approx 8.3397 \times 10^{-15}$ m, $r(136.29°) \approx 4.3196 \times 10^{-14}$ m

r의 평균과 불확도는:

$$\bar{r} \approx 4.33 \times 10^{-14}\ \text{m}, \quad \Delta r \approx 0.01 \times 10^{-14}\ \text{m}$$