풀이 (Solution)

파트 1 (Part One)

문제 1.1

우리는 다음을 얻는다:

$$A(\theta) \propto \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\theta\right) \tag{4}$$

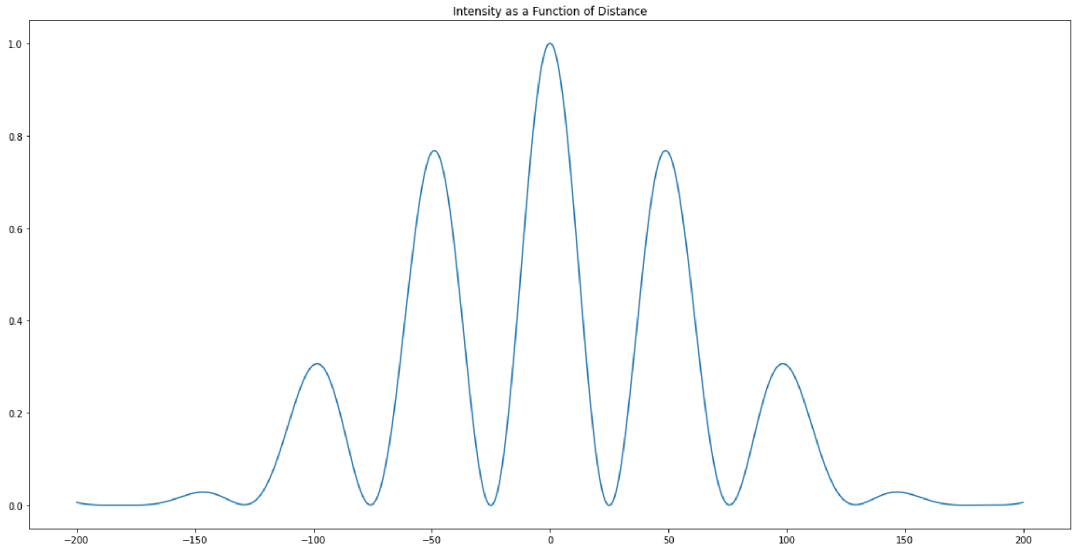
여기서 $\beta = \dfrac{\pi w \sin\theta}{\lambda}$이다.

문제 1.2

$w = 3\lambda$, $d = 10\lambda$로 두고, 슬릿과 벽 사이의 거리를 $D = 500\lambda$로 하자. 이는 슬릿을 다음과 같이 설정하는 것에 대응한다

```
slits = [
    [-5*wavelength, 3*wavelength, wavelength, wavelength, 1],
    [5*wavelength, 3*wavelength, wavelength, wavelength, 1]
]
```

그러면 다음 무늬가 나온다:



첫 번째 최솟값은 $(25.0 \pm 0.1)\lambda$에 있다. 불확정도는 for 루프가 스크린상의 위치를 0.1λ 간격으로 순회한다는 사실에서 비롯된다.

이론적으로, 첫 번째 최솟값은 $\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\theta\right) = 0$일 때 발생하며, 이는 $\frac{\pi d\theta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$를 의미하고, $\theta = \frac{\lambda}{2d}$일 때 발생한다. 근사 $\theta \approx \frac{x}{D}$를 사용하면, 첫 번째 최솟값은:

$$x_{\min} = \frac{D}{2d}\lambda = 25\lambda. \tag{5}$$

그러나 두 번째 최솟값은 $(75.9 \pm 0.1)\lambda$에서 발생하며, 이는 이론값 $x_{\min,2} = 3x_{\min} = 75\lambda$와 일치하지 않는다. 작지 않은 각도를 고려하더라도, 즉 $x_{3,\min} = D\arctan\left(\frac{3\lambda}{2d}\right) = 74.4\lambda$로 계산해도 여전히 일치하지 않는다. 이는 코드가 두꺼운 슬릿을 제대로 보정하지 않기 때문이다.

문제 1.3

각도 θ에 대해, 두 무늬의 페이저는 각각 진폭 $A_0(\theta)$를 갖지만, 위상이 $\frac{2\pi d}{\lambda}\theta$만큼 떨어져 있다. 따라서:

$$A = A_0(\theta)\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\theta\right) \tag{6}$$

우리는 이미 앞 문제에서 코드로 이를 실험적으로 검증하였다. 이제 단일(넓은) 슬릿의 간섭 무늬가

$$A(\theta) \propto \frac{\sin\beta}{\beta}, \tag{7}$$

로 주어짐을 보이기만 하면 되며, 이는 위에서 한 것과 비슷하게 최솟값 및/또는 최댓값 점들을 살펴봄으로써 할 수 있다.

문제 1.4

간격은 $d, 2d, \ldots, 2^{k-1}d$이다. 따라서 앞의 결과를 재귀적으로 사용하면:

$$A = A_0(\theta)\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\theta\right)\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\theta\right)\cdots\cos\left(\frac{2^{k-1}\pi d}{\lambda}\theta\right) \tag{8}$$

$d = w$인 경우를 생각하고, $2^k w$를 일정하게 유지하면서 $k \to \infty$ 극한을 취하자. 좌변에는 폭 $2^k d$인 단일 슬릿이 있고, 그 무늬가

$$A = \frac{\sin x}{x} \tag{9}$$

임을 안다($x = \frac{\pi(2^k d)\theta}{\lambda}$로 둘 때). 우변에는 앞 부분과 같은 상황이 있다:

$$A = A_0(\theta)\cos(x/2)\cos(x/4)\cdots\cos\left(x/2^k\right).$$

$k \to \infty$를 취하면, $d \to 0$이 되어 A_0는 1로 수렴한다. 따라서 원하는 관계식을 얻는다.

파트 2 (Part Two)

문제 2.1

임의의 구멍(aperture) 무늬는 구멍 함수(aperture function)로 나타낼 수 있는데, x_0에 중심을 두고 진폭을 원래의 f배로 줄이는 슬릿은 $f \cdot \delta(x - x_0)$로 나타낼 수 있다($\delta(x)$는 델타 함수).

구멍 함수의 푸리에 변환을 취하면 진폭 함수를 얻을 수 있다는 것이 밝혀진다. 길이 차원의 변수 x_1(슬릿의 위치를 나타냄)을 또 다른 길이 차원 x_2(스크린상의 위치를 나타냄)로 변환하는 것이 이상해 보일 수 있다. 푸리에 변환은 보통 변수를 그 역수(예: 시간을 진동수로)로 보내기 때문이다. 그러나 여기서는 그렇지 않다. 실제로는 x_1을 $\frac{x_2}{\lambda D}$로 변환하는 것이다.

자세히 다루지는 않겠지만, 진폭 함수의 푸리에 변환을 취하면 다시 구멍 함수를 얻을 수 있다는 것도 밝혀진다(즉, x_2를 x_1로 변환).

이중 슬릿의 경우, 세기 함수는 $\cos^2\left(\frac{\pi d x}{\lambda D}\right) = \cos^2(\pi d x_2)$이다. 항등식 $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$을 사용하면:

$$\cos^2(\pi d \cdot x_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi d \cdot x_2). \tag{10}$$

푸리에 변환을 취하면:

$$\begin{aligned}
\hat{f}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2\pi d \cdot x_2)\right] &= \hat{f}\left[\tfrac{1}{2}\right] + \hat{f}\left[\tfrac{1}{2}\cos(2\pi d \cdot x_2)\right] && (11)\\
&= \tfrac{1}{2}\hat{f}[1] + \tfrac{1}{2}\hat{f}[\cos(2\pi d \cdot x_2)] && (12)\\
&= \tfrac{1}{2}\delta(x_1) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta\left(x_1 - \frac{2\pi d}{2\pi}\right) + \delta\left(x_1 + \frac{2\pi d}{2\pi}\right)}{2}\right) && (13)\\
&= \tfrac{1}{2}\delta(x_1) + \tfrac{1}{4}\delta(x_1 - d) + \tfrac{1}{4}\delta(x_1 + d) && (14)
\end{aligned}$$

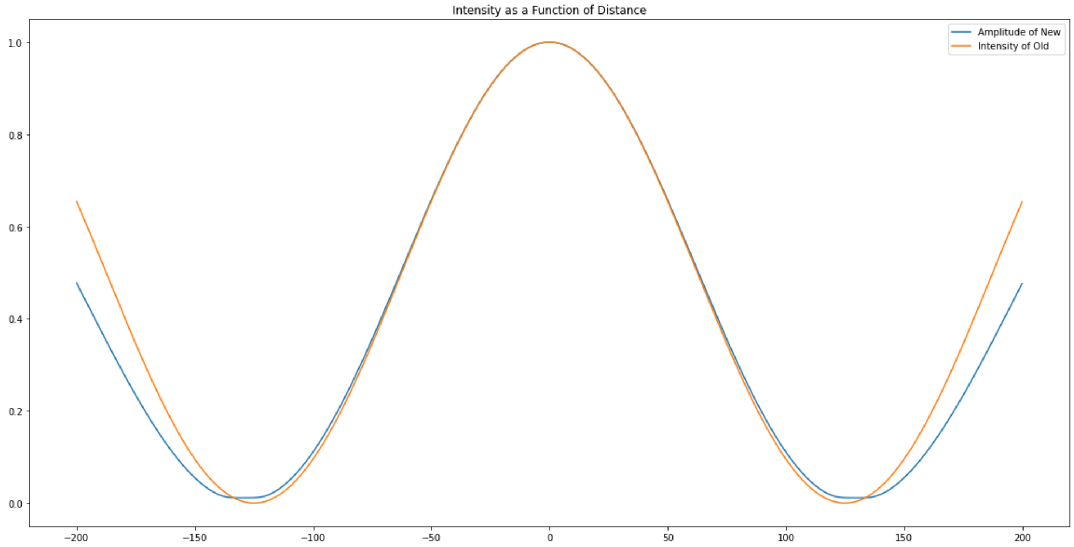
이고 이를 정규화하면(상대 진폭만이 중요하므로), 다음이 남는다:

$$\delta(x_1) + \frac{1}{2}\delta(x_1 - d) + \frac{1}{2}\delta(x_1 + d). \tag{15}$$

이를 실험적으로 검증할 수 있다. 다음과 같이 설정하면

```
slits = [
  [0*wavelength, 1*wavelength, wavelength, wavelength, 1],
  [-2*wavelength, 1*wavelength, wavelength, wavelength, 0.5],
  [2*wavelength, 1*wavelength, wavelength, wavelength, 0.5],
]
```

다음 그래프가 나오며, 참고를 위해 앞 구멍 무늬의 세기 무늬도 함께 그렸다:



이것이 완벽하지 않음에 유의하라. 이는 푸리에 변환이 원거리장 근사(far-field approximation)를 사용하지만, 첫 번째 최솟값의 위치가 반드시 충분히 작지는 않기 때문이다.

문제 2.2

비슷한 방법을 쓴다. 다음에 유의하라:

$$\cos^4(x) = \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(2x))\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) \tag{16}$$

푸리에 변환의 선형성을 적용하면,

$$\begin{aligned}\hat{f}\left[\tfrac{1}{4}(1 + 2\cos(2ax) + \cos^2(2ax))\right] &= \tfrac{1}{4}\delta(x) + \tfrac{1}{4}\delta\left(x - \tfrac{2a}{2\pi}\right) + \tfrac{1}{4}\delta\left(x + \tfrac{2a}{2\pi}\right) + \tfrac{1}{4}\hat{f}\left[\cos^2(2ax)\right] \\ &= \tfrac{1}{4}\delta(x) + \tfrac{1}{4}\delta(x + d) + \tfrac{1}{4}\delta(x - d) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\delta(x_1) + \tfrac{1}{4}\delta(x_1 - 2d) + \tfrac{1}{4}\delta(x_1 + 2d)\right) \\ &= \tfrac{3}{8}\delta(x) + \tfrac{1}{4}\delta(x \pm d) + \tfrac{1}{16}\delta(x \pm 2d)\end{aligned}$$

여기서 $a = \pi d$로 두고 앞 문제의 결과를 사용하였다. 이를 정규화하면, 중심에 전체 진폭을 통과시키는 슬릿 하나, 중심에서 거리 d에 위치하며 진폭을 $2/3$로 줄이는 슬릿 둘, 중심에서 거리 $2d$에 위치하며 진폭을 $\frac{1}{6}$로 줄이는 슬릿 둘이 된다.

문제 2.3

우리는 다음 푸리에 변환을 구하려 한다:

$$\hat{f}[\cos^n(ax_2)] \tag{17}$$

그런데 x_2 영역에서의 곱셈은 x_1 영역에서의 합성곱과 동등하다. 합성곱 정리를 적용하면:

$$\hat{f}[\cos^n(ax_2)] = \hat{f}[\cos(ax_2)]^{\star n} \tag{18}$$

여기서 우변의 곱셈은 합성곱 연산자 $\star$로 표시한다. 우리는

$$\hat{f}[\cos(ax_2)] = \frac{1}{2}\left(\delta\left(x_1 - \frac{a}{2\pi}\right) + \delta\left(x_1 + \frac{a}{2\pi}\right)\right) \tag{19}$$

임을 보았다. 합성곱이 결합법칙과 분배법칙을 만족함에 유의하라. δ가 항등원이라는 사실을 이용하면 다음 성질을 얻는다:

$$\delta(x-a) \star \delta(x-b) = \delta(x-a-b) \tag{20}$$

따라서:

$$\hat{f}[\cos(ax_2)]^{\star n} = \frac{1}{2^n}\left(\delta\left(x_1 - \frac{a}{2\pi}\right) + \delta\left(x_1 + \frac{a}{2\pi}\right)\right)^{\star n}$$

$\frac{a}{2\pi} = \frac{d}{2}$임에 유의하라. 분배법칙으로 전개하면, 각 항은 $\delta(x-d/2)$의 복사본 k개와 $\delta(x+d/2)$의 복사본 $n-k$개를 포함하며, 이는 $\delta(x - kd/2 + nd/2 - kd/2) = \delta(x + (n/2-k)d)$로 합쳐진다$(0 \le k \le n)$. $n+1$개의 슬릿을 S_k로 표시하면, S_k는 위치 $(k-n/2)d$에 있고 진폭을 $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$만큼 줄인다. 여기서 $\binom{n}{k}$는 합성곱 전개에서 첫 항의 복사본 k개와 둘째 항의 복사본 $n-k$개를 갖는 항(이는 고유한 슬릿에 대응)이 $\binom{n}{k}$개 있기 때문에 나타난다.

파트 3 (Part Three)

문제 3.1

먼저 몇 가지 관찰을 한다:

- 세기 무늬는 대칭이고 $x=0$에 중심을 둔다: 따라서 아마도 코사인 항만으로 이루어져 있을 것이다.
- 세기가 결코 0에 도달하지 않으므로, 진폭은 항상 양수이다. 그러면 가역성 문제를 걱정하지 않고 안전하게 제곱근을 취할 수 있다.
- 각 주기 사이의 봉우리 개수가 1이므로, 한 진동수가 정확히 다른 것의 두 배여야 한다. 주기를 살펴보면, 두 슬릿이 중심에서 $\pm 5\lambda$에, 다른 두 슬릿이 $\pm 10\lambda$에 위치한다고 결론지을 수 있다.

Python이나 Excel 같은 데이터 분석 도구를 사용하면, 주기가 102100.0λ임을 알 수 있다.

슬릿이 정수 위치에 있으므로, 각 코사인이 다음 형태임을 이용해 푸리에 급수를 쓸 수 있다:

$$\cos\left(d' \cdot \frac{2\pi}{\lambda D}x\right) \tag{21}$$

여기서 d'는 정수이다. 따라서 데이터를 다음과 같이 정리하자:

- 제곱근을 취한다.
- (가장자리 효과가 데이터를 망치지 않도록) 한 주기만 본다.
- x 대신 $10\pi x/\lambda D$에 대해 그린다.

푸리에 급수를 취하면(즉 $n=2$로), 다음을 얻는다:

```
{y: a0 + a1*cos(w*x) + a2*cos(2*w*x) + b1*sin(w*x) + b2*sin(2*w*x)}
```

파라미터	값	표준편차
a0	5.407222e−01	9.935952e−04
a1	1.419923e−01	1.439942e−03
a2	2.758724e−01	1.411563e−03
b1	−3.714775e−05	1.369781e−03
b2	−6.656304e−05	1.378570e−03

이를 통해 정현파를 재구성할 수 있다. 푸리에 변환을 취하면 구멍 함수를 얻는다. 참고로 다음과 같다:

```
slits = [
  [0*wavelength, 1*wavelength, wavelength, wavelength, 3],
  [-5*wavelength, 1*wavelength, wavelength, wavelength, 0.45],
  [5*wavelength, 1*wavelength, wavelength, wavelength, 0.45],
  [-10*wavelength, 1*wavelength, wavelength, wavelength, 0.77],
  [10*wavelength, 1*wavelength, wavelength, wavelength, 0.77],
]
```

문제 3.2

앞 문제와 비슷하게, (구별되는 곡선의 거동이 포착될 만큼 크되) 작은 각도에서 간섭 무늬를 "잘라낸다". x를 $\frac{2\pi}{\lambda D}x$로 척도 조정하면, 푸리에 계수를 다음과 같이 결정할 수 있다:

파라미터	값	표준편차
a0	2.045300e−01	1.285129e−04
a1	3.294887e−01	1.439479e−04
a2	2.371716e−01	8.086478e−05
a3	1.652102e−01	8.350614e−05
a4	6.081714e−02	2.142034e−04

푸리에 변환을 해석적으로 취하면,

$$0.0854\,\delta(x \pm 4) + 0.2070\,\delta(x \pm 3) + 0.2973\,\delta(x \pm 2) + 0.4130\,\delta(x \pm 1) + 0.5126\,\delta(x) \tag{22}$$

를 얻는다. f_X를 x에 대해 그리면 직선을 이룬다($r^2 = 0.998$).

문제 3.3

여기서 구멍 함수는 사실 삼각형(triangle)임에 유의하라:

$$\mathrm{tri}(x_1/5) \tag{23}$$

x_1에서 x_2로의 푸리에 변환은:

$$\mathrm{sinc}^2\left(\frac{5x_2}{\lambda D}\right). \tag{24}$$