2021 온라인 물리 올림피아드: 초청전(Invitational Contest)



실험 시험(Experimental Exam)

후원(Sponsors)

이 대회는 물리학, 수학, 교육 분야에서 훌륭한 일을 하고 있는 후원자들의 도움이 없었다면 불가능했을 것입니다.













일반 지침(General Instructions)

실험 시험은 8월 15일 0:01 GMT부터 하루 동안 진행되며, 50점 만점의 긴 서술형 문제 1개로 구성된다.

- 팀 리더는 최종 풀이 문서를 지정된 구글 폼에 제출해야 한다. 동점은 예상하지 않지만, 드물게 동점이 발생할 경우 제출 시각으로 순위를 가린다.
- 정정(clarification)을 요청하려면 지정된 폼을 사용하라. 모든 정정 사항을 보려면 해당 문서를 참고하라.
- 참가자에게는 풀이 자료를 최대 1기가바이트까지 제출할 수 있는 구글 폼이 제공된다. 풀이는 LaTeX로 작성하기를 권장한다. 다만 손으로 작성한 풀이(또는 둘을 혼합한 것)도 허용된다. 손으로 작성한 풀이 사진(jpg, png 등)이 여러 장이라면, 제출 전에 올바른 순서로 하나의 pdf로 정리해야 한다.

구체적 규칙(Specific Rules)

이 시험의 어떤 부분에서든, 팀 외부의 누구에게도 도움을 요청하지 않는 한, 온라인 도구와 자료를 사용하여 도움을 받을 수 있다. 허용되는 자료에는 위키백과(Wikipedia), 연구 논문, Wolfram Alpha, Python, Excel 등이 포함된다.

다만, 사용하는 모든 자료를 기록하고 해당되는 경우 인용해야 한다.

일반적인 원칙으로, 위키백과에서 찾을 수 없는 결과는 모두 직접 유도해야 한다. 따라서 "Wolfram Alpha에 의하면 이것이 참이다."와 같은 식의 풀이는 인정되지 않는다. 합리적으로 작성하라.

실험을 수행하도록 요구받을 때마다, 반드시 입력 파라미터(input parameter)와 출력 결과의 스크린샷을 제공해야 한다.

프로그램 접속(Accessing the Program)

Python 노트북에 접속하려면 제공된 링크를 따라가라. 아무것도 다운로드하지 않고 온라인에서 모든 코드를 실행할 수 있다. 링크에 접속할 수 없다면, 우리 웹사이트에서도 소스 코드를 제공한다.

배경 정보(Background Information)

이 문제에서는 Python으로 작성된 컴퓨터 시뮬레이션을 사용하여 슬릿 간섭 무늬(slit interference pattern)와 관련된 일련의 문제를 푼다. 코드가 결과를 정확히 어떻게 생성하는지 이해할 필요는 없지만, 코드가 취하는 알고리즘을 이해하면 도움이 될 수 있다.

프로그램은 간섭 무늬를 결정하기 위해 간단한 알고리즘을 사용한다.

1. 슬릿을 지정하여 구멍(aperture) 무늬를 만든다.
2. 슬릿을 균일한 $\lambda \times \lambda$ 조각으로 나눈다.
3. 스크린상의 각 위치 x에 대해, 점 x와 앞 단계에서 만든 각 조각의 중심 사이에 파동을 생성한다(페이저(phasor)로 표현).
4. 이 페이저들을 모두 더하고 제곱하여 세기(intensity)를 얻는다.
5. 최종 세기 무늬는 최댓값이 1이 되도록 정규화한다.

이 문제 전체에서, 슬릿의 높이는 λ라고 가정한다.

비고(Remark): 이 알고리즘은 $d = \lambda$인 경우를 얇은 슬릿(즉, 점 광원)으로 취급하며, 넓은 슬릿에 대해서는 부정확하다(그 이유를 생각해 보라). 이는 문제 1.2와 1.3에서만 문제가 된다. 이후의 다른 모든 실험 부분에서는 얇은 슬릿을 사용한다.

파트 1 (Part One)

먼저 프로그램 사용에 익숙해지자. 이를 위해, 일련의 문제를 통해

$$\frac{\sin(x)}{x} = \cos(x/2)\cos(x/4)\cos(x/8)\cdots \tag{1}$$

를 유도할 것이다.

문제 1.1 (1점)

파장 λ의 단색(monochromatic) 결맞은(coherent) 빛이 폭 w인 두 슬릿 위로 떨어지며, 두 슬릿의 중점은 거리 d만큼 떨어져 있다고 하자. 그 결과로 생기는 간섭 무늬의 진폭 함수(amplitude function) $A(\theta)$를 구하라. 여기서 θ는 중심으로부터의 편향 각도이다. 스크린은 멀리 있다고 가정한다. 증명이 반드시 필요한 것은 아니지만, 답이 틀렸을 경우 부분 점수를 받는 데 도움이 될 것이다.

문제 1.2 (4점)

현재 코드는 거리 $d = 8\lambda$만큼 떨어진 두 개의 얇은 슬릿의 간섭 무늬를 시뮬레이션한다. 다음을 시뮬레이션하도록 코드를 수정하라:

- 넓은 슬릿을 가진 이중 슬릿 실험. 슬릿의 위치와 폭은 자유롭게 선택할 수 있다. 배경 정보의 비고를 고려하라.

프로그램은 세기 함수를 출력할 것이다. 실험 결과에서 세기의 최솟값과 최댓값을 기록하고, (앞 문제에서 유도한) 이론적 결과와 비교하라. 둘이 일치하는가? 일치하지 않는다면, 일치하지 않는 이유로 가능한 것을 제시하라.

문제 1.3 (3점)

전체 폭 w를 가진 어떤 슬릿 무늬가 진폭 $A_0(\theta)$의 간섭 무늬를 만든다고 하자. 이 무늬 두 개를 중점이 거리 $d \geq w$만큼 떨어지도록(겹치지 않도록) 배치한다고 하자. 그 결과로 생기는 간섭 무늬의 진폭 함수 $A(\theta)$를 A_0와 기타 파라미터의 함수로, 증명과 함께 구하라.

이 결과를 코드로 실험적으로 검증하라.

문제 1.4 (5점)

$$\frac{\sin(x)}{x} = \cos(x/2)\cos(x/4)\cos(x/8)\cdots \tag{2}$$

임을 보여 문제를 완성하라. 이 부분에는 실험 부분이 없다.

파트 2 (Part Two)

문제 2.1 (8점)

두 얇은 슬릿의 간섭 무늬 세기가 $\cos^2(x)$처럼 거동함을 상기하라. 얇은 슬릿들의 어떤 배열을 만들어, 그 진폭 무늬가 두 얇은 슬릿의 세기 무늬와 정확히 똑같이 거동하도록 하는 것이 가능한가? 구체적으로, 한 슬릿 배열에서 나온 진폭 $A_1(x)$가 다른 슬릿 배열에서 나온 세기 $I_2(x)$처럼 거동한다는 것은 다음을 의미한다:

$$\frac{I_2(x)}{I_{2,\max}} = \frac{A_1(x)}{A_{1,\max}} \tag{3}$$

어떤 종류의 구멍(aperture)이 이러한 $A(x)$를 만들겠는가? 이를 실험적으로 검증하라. 무늬가 가장자리로 갈수록 어긋나는 것을 알게 될 것이다. 이 어긋남(deviation)은 어느 각도에서 유의미해지는가? "유의미함"은 주관적이므로, 유의미함을 어떻게 정의하는지 근거를 제시해야 한다.

이 문제를 푸리에 광학(Fourier Optics)을 사용하여 풀어라 (적어도 두 가지 다른 방법이 있다. 푸리에 광학의 개념을 빌려 쓰는 한 만점을 받는다):

- 위키백과에서 잠재적으로 유용한 네 가지 참고 자료가 있다. 이 자료들에 없는 결과를 사용한다면 직접 유도해야 한다. 이는 다음 두 문제에도 적용된다.
  - 프라운호퍼 회절 방정식(Fraunhofer Diffraction Equation)
  - 푸리에 광학(Fourier Optics)
  - 합성곱(Convolution)
  - 푸리에 변환(Fourier Transform)

공개 포럼에서 도움을 구하거나 다른 학생, 다른 팀, 교수 등에게 도움을 구하는 것은 엄격히 금지된다.

문제 2.2 (4점)

앞 문제에서, 진폭이 $\cos^2(x)$처럼 거동하는 일련의 얇은 슬릿을 구성하였다. 그 결과 세기는 $\cos^4(x)$처럼 거동한다.

이제 진폭 함수가 앞 문제의 세기 무늬, 즉 $\cos^4(x)$처럼 거동하도록 일련의 슬릿을 구성하라. 실험적으로 검증해도 좋지만, 만점을 받기 위해 반드시 필요한 것은 아니다.

문제 2.3 (4점)

이제 이를 임의의 $\cos^n(x)$로 일반화하라. 진폭 함수가 $\cos^n(x)$(n은 음이 아닌 정수)처럼 거동하게 하려면, 슬릿 무늬는 어떻게 되어야 하는가?

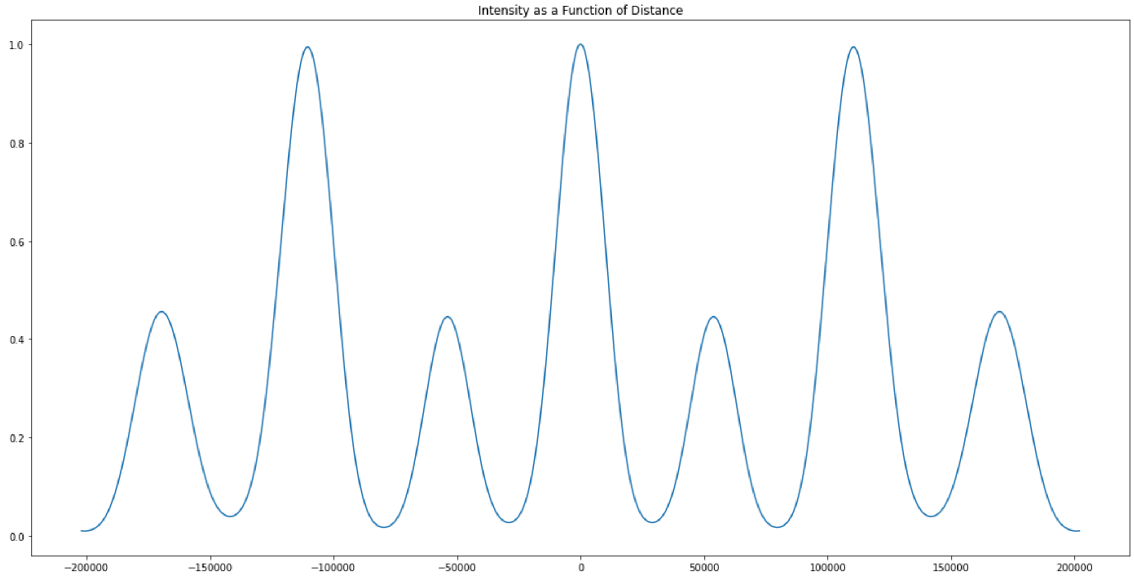
힌트: 막혔다면, $\cos^2(x)$와 $\cos^4(x)$ 경우를 바탕으로 추측을 세워, 각각이 얼마만큼의 진폭을 통과시키는지 나열하고, 모두 공통분모를 갖도록 해 보라. 앞 부분들을 올바르게 풀었다면, 분자는 매우 익숙한 패턴을 따를 것이다.

파트 3 (Part Three)

앞의 두 부분에서는 대부분 해석적으로 풀 수 있는 문제를 다루고, 코드로 답을 다시 확인하였다. 이제 데이터 분석이 필요한 몇 가지 문제를 다룬다.

문제 3.1 (11점)

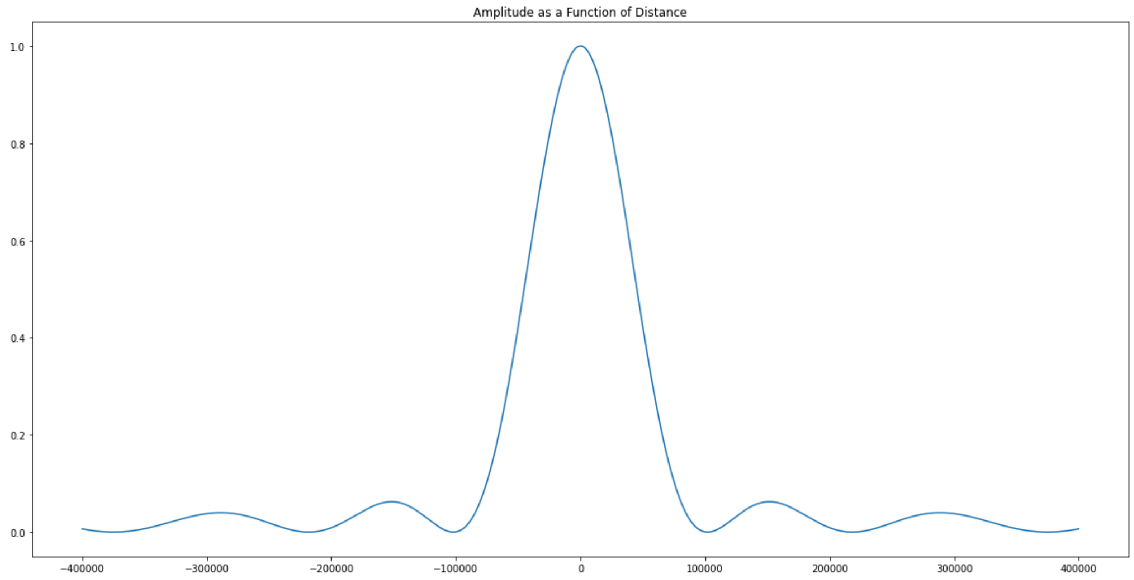
다음 그림은 일련의 슬릿(각 슬릿은 진폭을 어떤 인자만큼 줄일 수 있다)이 만든 간섭 무늬의 세기를 보여준다. 벽은 25 cm 떨어져 있고 500 nm 빛을 사용한다. x축은 스크린상의 위치를 나타내며, 단위는 λ이다.



구멍(aperture) 무늬를 가능한 한 정확히 결정하라. 원시 데이터 파일은 웹사이트에 첨부되어 있다.
비고(Note): 팀 외부 사람에게 도움을 구하지 않는 한, 이 문제를 풀기 위해 어떤 온라인 도구나 자료든 사용할 수 있다.

문제 3.2 (7점)

다음 그림은 $-4\lambda, -3\lambda, \ldots, +4\lambda$에 중심을 둔 9개의 얇은 슬릿이 만든 간섭 무늬의 **진폭(amplitude)**을 보여준다. 각 슬릿은 어떤 인자만큼 파장을 줄인다(이 인자가 각 슬릿마다 반드시 같은 것은 아니다).



다시, 스크린은 앞 문제와 같은 거리에 있고 같은 척도를 사용한다. 각 슬릿이 통과하는 빛의 진폭을 얼마나 줄이는지 결정하라.

x(단위 λ)에 중심을 둔 슬릿의 감소 인자를 f_x라 하자. 예를 들어, 가장 오른쪽 슬릿은 $x = 4$에 위치한다. $0 \leq x \leq 4$에 대해 (x, f_x)를 그래프로 그리고, 보이는 패턴을 기록하라.

문제 3.3 (3점)

앞 문제의 간섭 무늬는 (적어도 작은 각도 범위에서) 비교적 간단한 함수로 근사할 수 있다. 이 함수를 구하라.

힌트: 앞 문제에서 암시된 패턴을 살펴보라.