OPhO 초청 라운드: 유체역학 — 해설

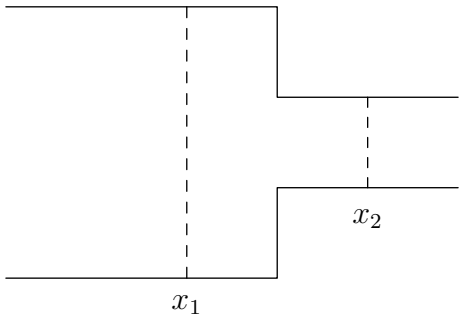
2022년 8월 1일

1 서론

공식 해설은 공개되지 않았다. HaslaLab에서 문제에 소개된 D. 슈뢰더의 유체 앱을 옮겨 구현해 아래 해설을 작성했다. 문제의 지시에 따라 **기본 설정**(유속 $u_0 = 0.100$, 동점성 계수 $\nu = 0.020$)을 유지했다. 앱은 D2Q9 격자 볼츠만(BGK) 해법을 쓴다. 매 단계마다 가장자리 셀은 밀도 1, 속도 $(u_0, 0)$인 평형 상태로 되돌리고, 장애물에는 반사 조건을 적용한다. 모든 값은 격자 단위(셀 크기 1, 시간 간격 1)다. 측정값은 센서가 읽은 ρ, u_x, u_y이다.

2 질량 유량 보존 (15점)

먼저 이 격자 볼츠만 알고리즘 구현이 질량 보존을 올바르게 모의하는지 살펴본다.



1. 위 그림과 같이 폭이 급격히 넓어지거나 좁아지는 관을 만들어라. 넓은 쪽과 좁은 쪽에서 각각 지점 x_1과 x_2를 잡고, 두 지점에서 유량 $\dfrac{dm}{dt}$를 계산하라. (10점)

2. 두 질량 유량이 일치하는가? 일치하지 않는다면 가능한 이유를 제시하라. (5점)

해설

설정. 200×80 격자에 수평 벽 두 개로 관을 만든다. $x < 100$에서는 $y = 20$와 $y = 60$에 두어 유체 셀 39개가 놓이고, $x \geq 100$에서는 $y = 30$와 $y = 50$에 두어 셀 19개가 놓인다. 두 부분은 $x = 100$에서 수직 벽으로 연결된다. 유체는 왼쪽 가장자리에서 들어와 관을 따라 흐른다. 넓은 부분에서 $x_1 = 50$, 좁은 부분에서 $x_2 = 150$를 택했다.

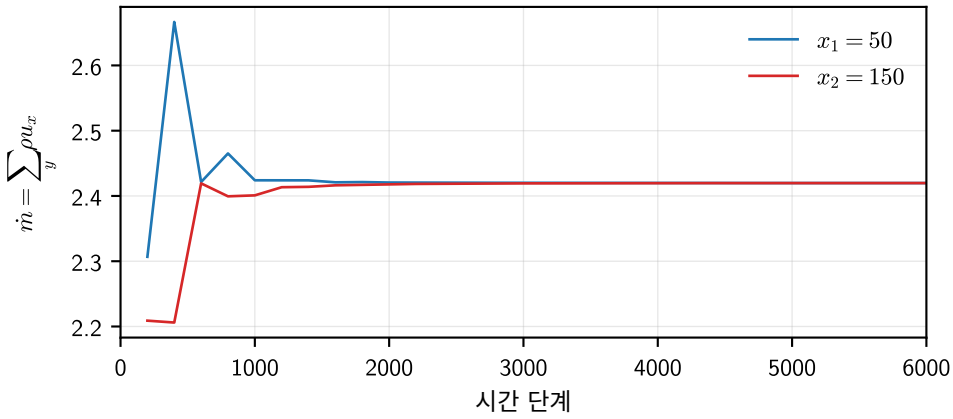
측정 [10점]. 단위 깊이당 질량 유량은 단면 전체를 지나는 질량 플럭스의 적분이다.

$$\frac{dm}{dt} = \int \rho\, u_x \, dy \approx \sum_{y} \rho(x, y)\, u_x(x, y)\, \Delta y. \tag{1}$$

각 단면에서 센서를 한 셀씩 움직여 ρ와 u_x를 읽었다. 벽에서는 $u_x = 0$으로 놓고 사다리꼴 공식으로 적분했다. 반사 경계의 벽면은 마지막 유체 격자점에서 반 셀 바깥에 있다. 약 2000단계 뒤 정상 상태가 되면(그림 참조), 측정값은 다음을 준다.

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{x_1} = 2.417, \qquad \left.\frac{dm}{dt}\right|_{x_2} = 2.410 \qquad \text{(격자 단위)}. \tag{2}$$

두 셀마다 읽으면 2.411와 2.390, 네 셀마다 읽으면 2.389와 2.319이다. 셀 수가 적은 좁은 부분에서 사다리꼴 적분 오차가 더 크다. 이 차이를 불확실성으로 보면 각각 $dm/dt|_{x_1} = 2.417 \pm 0.006$와 $dm/dt|_{x_2} = 2.410 \pm 0.02$이다. 시뮬레이션에서 모든 셀을 정확히 더하면 두 위치에서 모두 2.4197로, 소수점 아래 열 자리까지 같다.



일치 여부 [5점]. 정상 상태에서는 불확실성 범위에서 일치한다. 시뮬레이션은 각 위치에서 질량을 보존한다. 충돌은 각 셀의 $\sum_i f_i$를 바꾸지 않고, 이동 과정은 분포를 옮기기만 한다. 그래도 다음 원인으로 측정값이 다를 수 있다.

- **정상 상태 전 측정.** 처음 ~ 2000단계에서는 두 유량이 최대 20% 차이 난다(그림 참조). 격자 볼츠만 유체는 조금 압축될 수 있어, 압력 기울기가 형성되는 동안 관에 질량이 쌓이거나 빠져나간다.
- **밀도 누락.** 두 단면의 밀도는 $\rho \approx 1.127$과 1.081로 4% 차이 난다. 좁은 관을 따라 압력이 떨어지기 때문이다. 질량 유량 대신 부피 유량 $\int u_x dy$를 비교하면 2.147과 2.238로 4% 차이 난다.
- **성긴 표본 추출.** 속도 분포가 포물선에 가까우므로 좁은 단면에서 몇 점만 읽으면 적분값이 작게 추정된다. 네 셀마다 읽었을 때는 3% 작다.
- 유속을 높이거나 해상도를 낮추면 와류 방출로 흐름이 비정상 상태가 되어 한 번의 측정값이 요동친다. 이때는 측정값을 시간에 대해 평균해야 한다.

3 벽면 법칙 (25점)

벽면 법칙은 난류에서 어느 점의 평균 유속과 그 점에서 벽이나 유체 경계까지의 거리 사이의 경험적 관계다. 그 식은 다음과 같다.

$$u_x = \frac{u_T}{\kappa} \ln\left(\frac{\rho u_T}{\mu} y\right) + C, \tag{3}$$

여기서 $u_T = \sqrt{\tau_W/\rho}$는 마찰 속도, $\tau_w = \mu \left.\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=0}$는 벽면 전단 응력이며, κ와 C는 상수다. 연구 결과에 따르면 κ의 값은 0.35에서 0.42 사이다. 직선으로 벽을 모형화하고 다음에 답하라.

1. u_x와 y의 관계는 로그 관계인가? (10점)
2. κ와 C의 값은 얼마인가? (10점)
3. κ의 값이 실험 결과와 일치하는가? 일치하지 않는다면 가능한 이유를 제시하라. (5점)

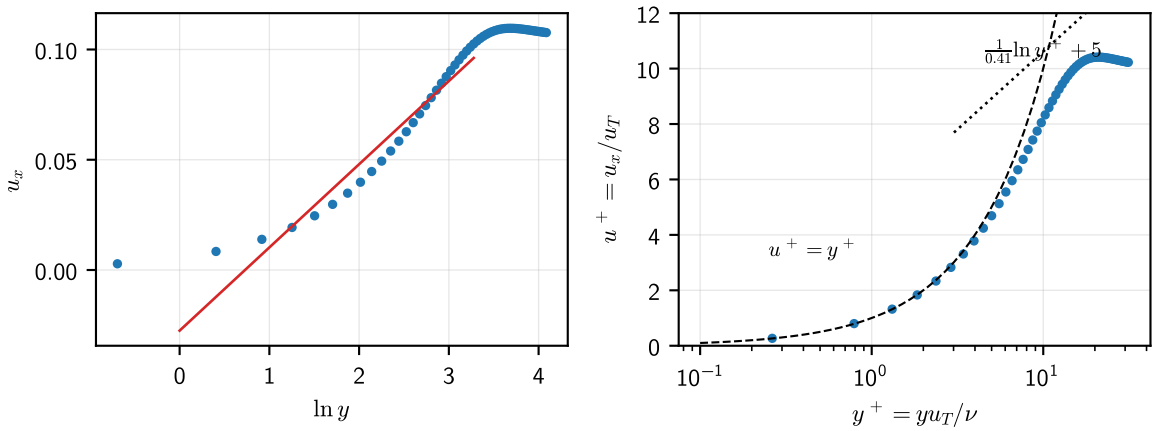
해설

설정. 600×240 격자에서 $y = 20$에 가로 벽을 놓아 터널 전체를 가로지르게 했다. 정상 상태에 이르도록 30000단계 동안 계산했다. 벽을 따라 경계층이 자란다. $x = 200,\ 300,\ 400,\ 500$에서 센서를 벽으로부터 한 셀씩 올려 u_x를 읽었다. 반사 경계의 벽면은 벽 셀과 첫 유체 셀 사이의 중간에 있어 n번째 셀은 벽에서 $y = n - \frac{1}{2}$만큼 떨어져 있다. $u_x = 0.99U$인 지점까지의 경계층 두께는 $\delta_{99} = 18.5$–26.5 셀이다.

마찰 속도. 벽에 가까운 세 점을 직선으로 맞춰 $\partial u_x/\partial y$를 얻는다. $\mu = \rho\nu$를 써서

$$u_T = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\nu \frac{\partial u_x}{\partial y}} = 0.0105\text{–}0.0120, \tag{4}$$

이를 이용해 벽 단위 $y^+ = y u_T/\nu$와 $u^+ = u_x/u_T$를 정의한다.



1. 로그 관계인가? [10점] 그렇지 않다. u_x를 $\ln y$에 대해 그리면(왼쪽, $x = 400$) 직선 구간이 없다. 벽 단위로 나타내면(오른쪽) 경계층 대부분($y^+ \lesssim 5$)에서 점성 아층 관계 $u^+ = y^+$(파선)를 따른다. 가장자리에서도 $y^+ = 11$–15에 그치므로 로그 구간($y^+ \gtrsim 30$, 점선)에 이르지 못한다. 처음 1–7개 셀에서는 직선 맞춤에서 $R^2 = 0.9997$, 로그 맞춤에서 $R^2 = 0.96$를 얻는다.

2. κ와 C [10점]. 식 (3)을 적용해 $1 \le y \le \delta_{99}$ 구간에서 $u_x = a \ln y + b$로 맞추면 $\kappa = u_T/a$와 $C = b - a\ln(u_T/\nu)$를 얻는다. 네 위치에서 얻은 값은 $\kappa = 0.301,\ 0.283,\ 0.279,\ 0.304$ 및 $C = -0.0008,\ -0.0025,\ -0.0033,\ -0.0024$(격자 유속 단위)이다. 따라서

$$\kappa = 0.29 \pm 0.01, \qquad C = -0.002 \pm 0.001 \ \ (C/u_T \approx -0.2), \tag{5}$$

불확실성은 네 위치에 따른 산포다. 경계층 안쪽 30%만 사용하면 $\kappa \approx 0.55$가 된다. 이것도 로그 관계가 아님을 보여 준다.

3. 실험과 일치하는가? [5점] 0.29는 범위 0.35–0.42에 들지 않는다. 그 이유는 다음과 같다.

- **난류가 아니다.** 벽면 법칙은 난류 경계층을 설명한다. 여기서는 $Re_x = u_0 x/\nu = 1000$–2500로, 평판 경계층이 난류로 바뀌는 $Re_x \sim 5 \times 10^5$보다 훨씬 작다. 이 경계층은 블라지우스 속도 분포를 따르는 층류이며 로그 구간이 없다.

- **레이놀즈 수를 높일 수 없다.** 격자 볼츠만 해법이 정확하려면 $u_0 \ll c_s = 1/\sqrt{3}$이어야 한다(마하 수 제한). ν를 낮추면 계산이 불안정해져 이 프로그램으로 큰 Re에 도달할 수 없다. Re가 큰 2차원 유동이라도 3차원 난류와는 다르다.

- **해상도.** 경계층 전체에 셀이 약 20개뿐이어서 벽면 기울기와 그에 따른 u_T를 거칠게만 구할 수 있다.