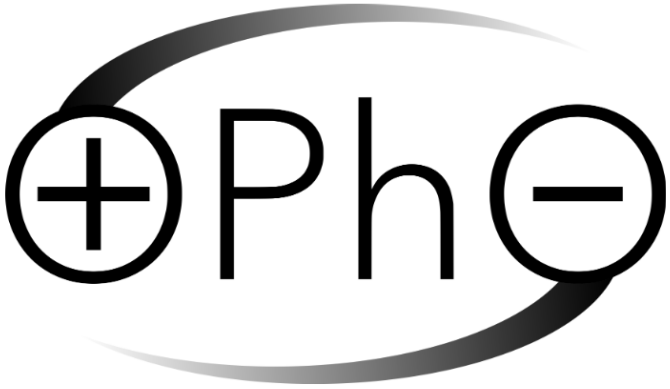
2023 온라인 물리 올림피아드: 초청 라운드



실험 시험 해설

후원사
물리학, 수학, 교육 분야에서 활약하는 후원사들의 도움 덕분에 이 대회를 열 수 있었습니다.

Jane Street
Wolfram Language™
AwesomeMath
making x,y,z as easy as a, b, c
BEYOND THE BIG BANG
YOUTUBE / PODCAST
Ph
AoPS
Art of Problem Solving

해설

공식 해설은 공개되지 않았다. 아래는 HaslaLab에서 주최 측 노트북의 함수(`system`, `rk4_step`, `rk2_step`, `get_distance`)를 사용하여 얻은 해설이다. 시간은 로렌츠 방정식의 무차원 단위로 나타낸다.

문제 1

> 상미분방정식이 안정적이어서 궤도가 유계가 되려면 σ, ρ, β가 어떤 조건을 만족해야 하는가? 끌개는 어디에 있는가?

유계성. 다음을 생각하자.

$$V = x^2 + y^2 + (z - \sigma - \rho)^2. \tag{1}$$

흐름을 따라 xyz 항과 xy 항이 상쇄되어 다음을 얻는다.

$$\frac{dV}{dt} = -2\left[\sigma x^2 + y^2 + \beta\left(z - \frac{\sigma+\rho}{2}\right)^2\right] + \frac{\beta(\sigma+\rho)^2}{2}. \tag{2}$$

$\sigma > 0$이고 $\beta > 0$이면 대괄호 안은 양의 정부호이므로 타원체 바깥에서 $dV/dt < 0$이다. 따라서 모든 궤도는 유한한 시간 안에 V의 유계인 준위집합 안으로 들어가 그 안에 머문다. **$\sigma > 0$, $\beta > 0$이면 ρ의 값에 관계없이 궤도가 유계다**. 위상공간 부피는 $\nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + 1 + \beta) < 0$의 비율로 줄어들어 궤도가 부피 0인 끌개로 모인다.

고정점과 끌개. $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$으로 놓으면 원점 O를 얻고, $\rho > 1$일 때는 다음 고정점도 얻는다.

$$C_\pm = \left(\pm\sqrt{\beta(\rho-1)},\ \pm\sqrt{\beta(\rho-1)},\ \rho - 1\right). \tag{3}$$

$\rho < 1$이면 원점이 유일하고 안정적인 끌개다. $C_\pm$ 주변을 선형화하면 특성방정식 $\lambda^3 + (\sigma+\beta+1)\lambda^2 + \beta(\sigma+\rho)\lambda + 2\sigma\beta(\rho-1) = 0$을 얻는다. 라우스–후르비츠 조건에 따라 $\sigma > \beta + 1$이면 $C_\pm$가 안정적인 범위는 다음과 같다.

$$1 < \rho < \rho_H = \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-\beta-1}. \tag{4}$$

$\sigma = 10$, $\beta = 8/3$이면 $\rho_H = 470/19 \approx 24.74$이다. $\rho = 28 > \rho_H$에서는 세 고정점이 모두 불안정하다. 원점은 안장점이고 $C_\pm$에서 고윳값은 -13.85와 $0.094 \pm 10.19i$이다. 궤도는 기이 끌개인 로렌츠 끌개에 모이며, 두 날개는 다음 점들을 중심으로 감긴다.

$$C_\pm = (\pm 6\sqrt{2},\ \pm 6\sqrt{2},\ 27) \approx (\pm 8.49,\ \pm 8.49,\ 27). \tag{5}$$

문제 2

> 매개변수 ρ를 원래 값보다 약간 높이고 σ와 β는 그대로 둔다. 계의 거동은 어떻게 달라지는가? 특히 끌개의 위치와 계의 안정성은 어떻게 변하는가?
>
> 이제 ρ는 원래 값으로 두고 σ와 β를 원래 값에서 조금 바꾼다. 이번에도 계의 거동, 끌개의 위치, 계의 안정성이 어떻게 변하는지 설명하라.

ρ를 높일 때. 식 (3)에 따라 날개 중심은 위($z = \rho - 1$, $dz/d\rho = 1$)와 바깥($|x| = |y| \propto \sqrt{\beta(\rho-1)}$)으로 이동하며 끌개가 커진다. ρ_H는 ρ와 무관하므로 $C_\pm$는 더 불안정해진다. $\rho = 28$, 30, 32에서 복소 고윳값의 실수부는 각각 0.094, 0.147, 0.198이다. 문제 3과 같이 측정한 최대 랴푸노프 지수는 0.909 ± 0.012에서 0.954 ± 0.004와 0.996 ± 0.008로 증가한다. 따라서 계의 혼돈성이 커진다.

σ와 β를 바꿀 때. 중심 높이 $\rho - 1$는 그대로이고, x, y 좌표 $\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}$는 β에만 의존한다($\beta = 3$이면 ± 9, $\beta = 2.5$이면 ± 8.22). σ는 중심 위치에 영향을 주지 않는다. 달라지는 값은 ρ_H이다. $\sigma = 9$와 11이면 각각 24.75와 25.0, $\beta = 2.5$와 3이면 각각 23.85와 26.67이다. 변화가 작으면 ρ =28은 ρ_H보다 커서 거동은 여전히 혼돈적이고 최대 랴푸노프 지수만 달라진다($\sigma = 9$:

0.890, $\sigma = 11$: 0.912, $\beta = 2.5$: 0.872, $\beta = 3$: 0.939). ρ_H를 28에 가깝게 만드는 변화(예를 들면 β를 높이는 경우)는 혼돈성을 약화한다. $\rho_H > 28$가 되면 궤도는 C_+ 또는 C_-로 수렴한다.

문제 3

다음 매개변수를 가진 로렌츠 계의 최대 랴푸노프 지수(MLE)를 계산하라.

- $\sigma = 15.6$
- $\rho = 35.4$
- $\beta = 3.13$

이 결과에서 계에 대해 무엇을 알 수 있는가? 불확실성도 추정해 보라.

두 궤도를 오랫동안 따라가면 $d(t)$가 끌개 크기에서 포화하므로 베네틴 재정규화법을 사용한다. 기준 궤도를 $t = 50$까지 진행시켜 끌개 위에 놓고, 두 번째 궤도는 $d_0 = 10^{-8}$만큼 떨어진 곳에서 시작시킨다. 두 궤도를 `rk4_step`$(dt = 0.01)$로 $\tau = 1$ 동안 진행시킨 뒤 `get_distance`로 간격 d_k를 잰다. 두 번째 궤도를 같은 방향을 따라 거리 d_0로 되돌린다. 이 단계를 $n = 200$회 반복하면 다음을 얻는다.

$$\lambda \approx \frac{1}{n\tau} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{d_k}{d_0}. \tag{6}$$

서로 다른 무작위 시작점에서 열 번 실행해 다음 값을 얻었다.

$$1.186,\ 1.179,\ 1.150,\ 1.170,\ 1.165,\ 1.174,\ 1.163,\ 1.143,\ 1.170,\ 1.159$$

따라서

$$\lambda_{\max} = 1.17 \pm 0.01 \tag{7}$$

(표준편차 0.013, 평균의 표준오차 0.004). 같은 코드를 $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$에 적용해 검산하면 0.909 ± 0.012로, 알려진 값 0.906에 가깝다.

$\lambda_{\max} > 0$이므로 계는 혼돈적이다. 가까운 궤도 사이의 간격은 평균 $e^{1.17t}$처럼 증가한다. 초기 오차는 $1/\lambda \approx 0.86$ 시간 단위마다 e배가 된다. 여기서는 $\rho_H = 29.55 < 35.4$이므로 모든 고정점이 불안정하다.

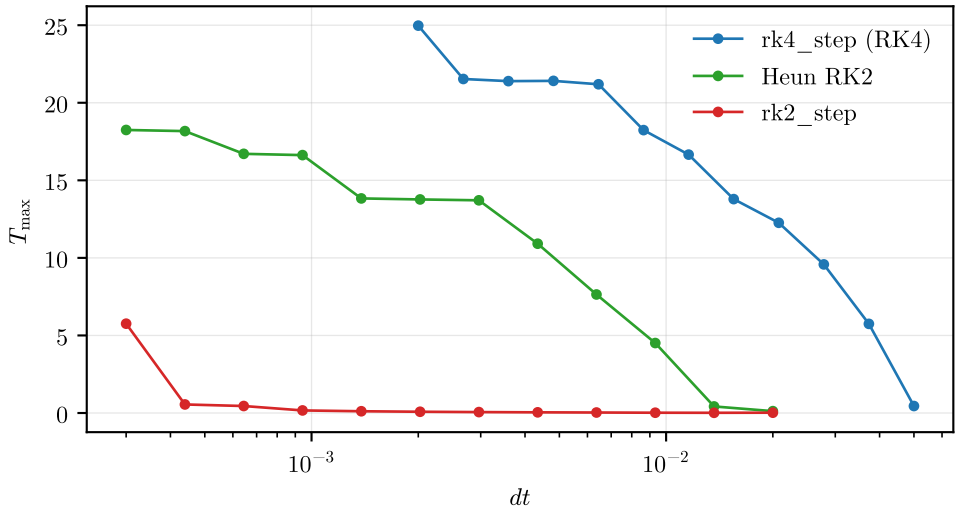
문제 4

시뮬레이션이 실제 값에 대해 정확도 99%를 유지하는 최대 시간을 $T_{\max}$라 하자. 수치해법과 시간 간격 dt가 시뮬레이션을 결정한다.

`rk4_step`를 쓰고 시작점을 $(1, 1, 1)$로 두어, 여러 dt에 대해 $T_{\max}$를 추정하라. 그래프를 그려라.

이제 `rk2_step`로 같은 작업을 하라. 어떤 차이가 나타나는가?

실제 값으로는 허용오차 2×10^{-14}인 8차 도먼드–프린스 해(scipy DOP853)를 쓴다. $t = 38.6$까지는 허용오차 3×10^{-14}인 계산과 10^{-3} 이내로 일치하므로 그 시점까지 신뢰할 수 있다. $T_{\max}$는 상대오차 $|\mathbf{r}_{dt} - \mathbf{r}|/|\mathbf{r}|$가 1%를 처음 넘는 시각이다.



- **`rk4_step`:** $dt = 0.05$일 때 $T_{\max} = 0.45$, 0.028일 때 9.6, 0.0116일 때 16.7, 0.002일 때 25.0이다. RK4의 전역 오차는 $dt^4 e^{\lambda t}$에 비례한다. 따라서 $T_{\max} \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{0.01}{C\,dt^4}$를 예상한다. $\ln dt$에 대한 직선의 기울기는 $-4/\lambda \approx -4.4$이며, 측정값은 약 -5이다. 궤도가 원점의 안장점 근처를 지나 반대 날개로 옮겨 갈 때 오차가 급증해 계단이 생긴다.
- **`rk2_step`:** $T_{\max}$는 거의 0이다($dt = 3 \times 10^{-4}$일 때 5.8, 더 큰 dt에서는 1 미만). 노트북의 `rk2_step`는 $\mathbf{s} + dt\,\mathbf{f}(\mathbf{s} + dt\,\mathbf{f}(\mathbf{s}))$이다. 테일러 전개에서 dt^2의 계수가 $\frac{1}{2}$ 대신 1이므로 **일차** 정확도다. 실제 2차 방법인 호인 방법의 식은 $\mathbf{s} + \frac{dt}{2}[\mathbf{f}(\mathbf{s}) + \mathbf{f}(\mathbf{s} + dt\,\mathbf{f}(\mathbf{s}))]$이다. $dt = 0.0093$에서 $T_{\max} = 4.5$, 0.003에서 13.7, 3×10^{-4}에서 18.2을 얻는다. 기울기 $\approx -2/\lambda$로 증가하므로 RK4보다 느리다.

따라서 같은 $T_{\max}$에 도달하는 데 RK4는 2차 방법보다 훨씬 큰 dt를 쓸 수 있다. dt를 절반으로 줄이면 RK4에서는 약 $4\ln 2/\lambda \approx 3.1$, 2차 방법에서는 약 1.5 시간 단위를 더 얻는다. 어느 방법이든 dt가 작아질 때 $T_{\max}$는 로그에 비례해 늘어나는 데 그친다. 혼돈 계에서 모든 오차가 $e^{\lambda t}$에 비례해 증폭되기 때문이다.

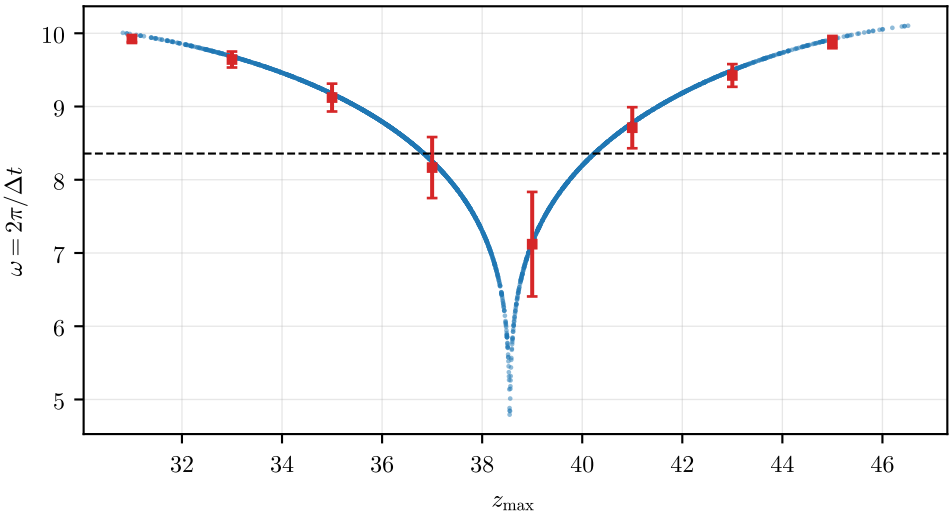
문제 5

$\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$라 하자. 평균 각진동수 ω_0는 얼마인가? 불확실성도 제시하라. 위치에 따라 어떻게 변하는가?

C_+ 또는 C_- 주위를 한 바퀴 도는 동안 z는 극댓값을 한 번만 지난다. `rk4_step`($dt = 0.002$)로 $t = 20$부터 2020까지 적분해 z의 극댓값을 찾고 포물선 보간으로 시각을 보정했다. 이웃한 두 극댓값 사이의 간격으로부터 $2\pi/\Delta t$를 구해 한 바퀴의 각진동수로 삼았다. 2660바퀴를 측정해 다음을 얻었다.

$$\omega_0 = \frac{2\pi N}{t_N - t_0} = 8.36 \pm 0.01 \tag{8}$$

(평균 주기 0.752). 데이터의 20개 구간에서 ω_0를 따로 계산해 얻은 표준오차를 불확실성으로 삼았다.



위 그래프는 각진동수가 위치에 따라 어떻게 달라지는지 보여 준다. 가로축은 한 바퀴 동안 z의 최댓값으로 궤도의 크기를 나타낸다. $C_{\pm}$에 가까운 작은 궤도($z_{\max} \approx 31$)에서는 $\omega \approx 10$이며, 선형화한 고윳값 허수부 10.19에 가깝다. 궤도가 바깥쪽으로 감겨 나가면서 느려진다. 원점의 안장점을 스치는 궤도($z_{\max} \approx 38.5$)는 그 근처에 오래 머물러 $\omega \approx 5$까지 내려간다. 더 큰 궤도는 반대 날개로 넘어가며, $z_{\max} \approx 46$에서 다시 $\omega \approx 10$까지 빨라진다. 따라서 각진동수는 일정하지 않으며, 궤도가 $C_{\pm}$에서 원점 쪽으로 이동할수록 줄어든다.