# 2023 온라인 물리 올림피아드:
# 초청 대회(Invitational Contest)




## 실험 시험(Experimental Exam)

### 후원사(Sponsors)

이 대회는 물리학, 수학, 교육 분야에서 훌륭한 일을 하고 있는 후원사들의 도움 없이는 불가능했습니다.

# 일반 안내 사항

실험 시험은 25점 만점의 서술형 문제 1개로 구성되며, 8월 6일 GMT 오전 0시 1분부터 만 1일에 걸쳐 진행됩니다.

- 팀 리더는 최종 풀이 문서를 이 구글 폼에 제출해야 합니다.
- 해명(clarification)을 요청하려면 이 양식을 사용하십시오. 모든 해명 사항을 보려면 이 문서를 참고하십시오.
- 참가자에게는 풀이를 위해 최대 100메가바이트의 데이터를 제출할 수 있는 구글 폼이 제공됩니다. 풀이는 LaTeX으로 작성할 것을 권장합니다. 다만, 손으로 쓴 풀이(또는 둘을 혼합한 것)도 인정됩니다. 손으로 쓴 풀이 사진(jpg, png 등)이 여러 장인 경우, 제출 전에 올바른 순서로 pdf에 정리해야 합니다. 미리 만들어진 LaTeX 템플릿을 원하시면, 여기에 준비해 두었습니다.

# 구체적 규칙

이 시험의 어느 부분에서든, 팀 외부의 누구에게도 도움을 요청하지 않는 한, 도움이 되는 온라인 도구와 자료를 사용할 수 있습니다. 허용되는 자료에는 Wikipedia, 연구 논문, Wolfram Alpha, Python, Excel 등이 포함됩니다.

다만, 사용한 모든 자료를 문서화하고 해당되는 경우 인용해야 합니다.

일반적인 원칙으로, Wikipedia에서 찾을 수 없는 어떤 결과든 직접 유도해야 합니다. 따라서, ``Wolfram Alpha에 따르면, 이것은 참이다"와 같은 식의 풀이는 인정되지 않습니다. 합리적으로 행동해 주십시오.

**실험을 수행하라고 요청받을 때마다, 입력 매개변수와 출력의 스크린샷을 제공해야 합니다.**

# 프로그램 접속

Python 노트북에 접속하려면, 이 링크를 따르십시오. 아무것도 다운로드하지 않고 온라인으로 모든 코드를 실행할 수 있습니다. 링크에 접속할 수 없는 경우, 우리 웹사이트에서도 소스 코드를 제공할 것입니다.

# 배경 정보

이 문제에서, 여러분은 Python으로 작성된 컴퓨터 시뮬레이션을 실행하여 상미분 방정식계인 로렌츠계(Lorenz system)와 관련된 일련의 문제를 완성할 것입니다. 코드가 정확히 어떻게 작동하는지 완전히 이해할 필요는 없지만, 코드가 따르는 과정을 파악하는 것은 도움이 될 수 있습니다.

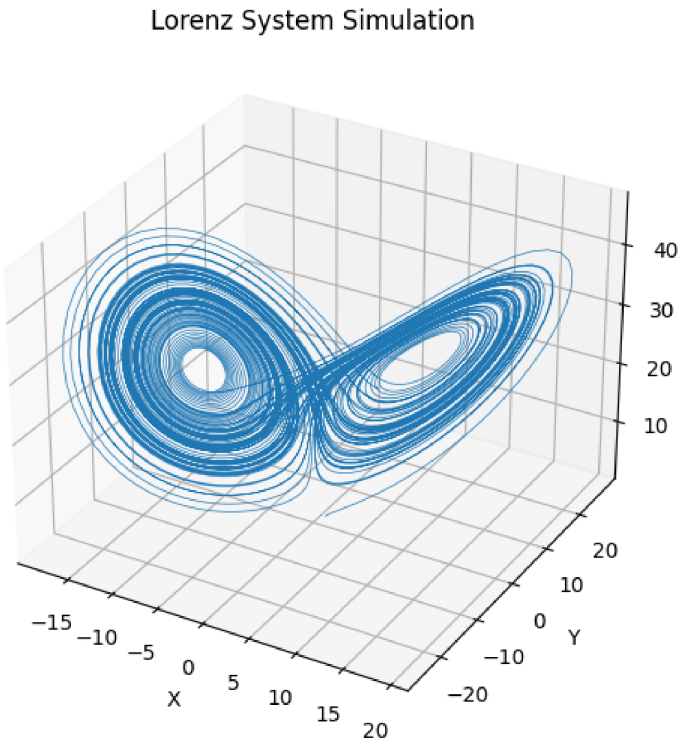
이 스크립트는 로렌츠 계를 시뮬레이션하고 도시하기 위해 간단한 알고리즘을 사용합니다.

1. 로렌츠 계 방정식의 상수를 정의하고, 방정식계를 함수로 정의하며, 초기 상태를 설정합니다. 시간 간격(time-step), 최대 시간, 단계 수를 포함한 시뮬레이션 매개변수를 설정합니다.
2. 4차 및 2차 룽게-쿠타(Runge-Kutta) 방법을 함수로 구현합니다. 이는 로렌츠 계 방정식을 푸는 데 사용됩니다.

3. 각 시간 단계마다 4차 룽게-쿠타 방법으로 계의 상태를 갱신하고 상태 궤적에 저장하는 루프를 실행합니다.
4. 시간에 따른 계의 거동을 시각화하기 위해 로렌츠 계의 상태 궤적을 3차원 그래프로 도시합니다.

# 로렌츠 계(The Lorenz System)

로렌츠 계(Lorenz system)는 Edward Lorenz가 대류성 유체 흐름의 물리적 성질을 연구하면서 처음 다룬 상미분 방정식(ODE)계입니다. 이는 특정 매개변수 값과 초기 조건에 대해 혼돈(chaotic) 해를 갖는 것으로 유명합니다. 특히, 이 계는 혼돈계의 핵심 성질인 초기 조건에 대한 민감한 의존성을 보입니다. 다시 말해, 약간 다른 초기 조건에서 시작한 궤적이 엄청나게 다른 상태에 도달할 수 있습니다. 더 많은 정보는, 나비 효과(Butterfly effect)에 관한 Veritasium의 이 영상을 참고하십시오.




로렌츠 계는 양 $(x, y, z)$에 대한 결합 미분 방정식으로 정의되며, 여기서 $x$는 대류율(rate of convection)에, $y$는 수평 온도 변화에, $z$는 연직 온도 변화에 비례합니다:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$
$$\dot{z} = xy - \beta z$$

여기서 $\sigma, \rho, \beta$는 계 매개변수입니다. 매개변수 $\sigma$는 프란틀 수(Prandtl number), $\rho$는 레일리 수(Rayleigh number), $\beta$는 유체층의 모양과 관련된 기하학적 인자입니다. 점은 시간 도함수를 나타냅니다.

로렌츠 계는 매개변수 $\sigma, \rho, \beta$가 변함에 따라 고정점(fixed point), 극한 순환(limit cycle), 혼돈을 포함한 다양한 거동을 보입니다. 특정 매개변수 값에 대해, 이 계는 혼돈 해를 가집니다. 가장 유명한 예는 $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$인 경우입니다. 이 매개변수 값 집합은 위상 공간에서 계가 그리는 경로인 프랙탈 구조, 로렌츠 끌개(Lorenz attractor)를 발생시킵니다.

로렌츠 계를 시뮬레이션하기 위해, 우리는 미분 방정식에 대한 특별한 근사 기법인 룽게-쿠타(Runge-Kutta) 방법을 사용합니다. 기본 발상은 한 시간 단계 내의 여러 점에서 도함수를 계산한 뒤, 이 도함수

들을 가중 평균으로 결합하여 다음 시간 단계에서 계의 상태를 추정하는 것입니다. 이 접근법은 더 단순한 1차 오일러 방법(Euler method)에서처럼 단순히 시간 단계의 시작점에서 도함수를 외삽하는 것보다 더 정확한 예측을 제공합니다.

이 문제에서, 여러분은 코드를 많이 작성할 필요가 없습니다. 우리가 필요한 함수 대부분을 작성해 두었습니다. 여러분이 해야 할 일은 그것들을 Google Colab에 붙여넣는 것뿐입니다.

- system(state, t): 이 함수는 로렌츠 계를 나타냅니다. 상태 벡터 $[x, y, z]$와 시간 $t$를 받아, 도함수 $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$를 출력합니다.
- rk4_step(state, t, dt, system): 이 함수는 수치 적분을 위한 4차 룽게-쿠타(RK4) 방법을 구현합니다. 상태 벡터 $[x, y, z]$, 시간 $t$, 시간 간격 $dt$, 계 함수를 받습니다. 시간 $t + dt$에서의 상태를 출력합니다.
- rk2_step(state, t, dt, system): rk4_step과 유사하게, 이 함수는 수치 적분을 위한 2차 룽게-쿠타(RK2) 방법을 구현합니다.
- get_distance(state1, state2): 이 함수는 두 상태 벡터를 받아 그 사이의 직교(Cartesian) 거리를 반환합니다.

**문제 1**
ODE가 안정하기(즉, 유계 궤도(bounded orbit)) 위해서 $\sigma, \rho, \beta$가 만족해야 하는 조건은 무엇입니까? 끌개(attractor)는 어디에 위치합니까?

**문제 2**
매개변수 $\rho$를 원래 값보다 약간 높게 바꾸고, $\sigma$와 $\beta$는 원래 값으로 유지한다고 가정합시다. 계의 거동은 어떻게 변합니까? 특히, 끌개의 위치는 어떻게 변하며, 계의 안정성에는 무슨 일이 일어납니까?
이제 $\rho$는 원래 값으로 유지하고, $\sigma$와 $\beta$를 원래 값과 약간 다른 값으로 바꾼다고 가정합시다. 다시, 계의 거동, 끌개의 위치, 계의 안정성에서의 변화를 기술하십시오.

계가 얼마나 혼돈적인지를 분석하기 위해, 우리는 종종 랴푸노프 지수(Lyapunov exponent)를 사용합니다. 약간 다른 초기 조건에서 시작하는 동역학계의 두 궤적을 생각해 봅시다. 시각 $t$에서 첫 번째 궤적의 상태를 $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$로, 두 번째 궤적의 상태를 $\mathbf{r}(t) + \delta\mathbf{r}(t)$로 표기하며, 여기서 $\delta$는 작은 섭동(perturbation)입니다.

두 궤적 사이의 거리는 $d(t) = \|\delta\mathbf{r}(t)\|$로 나타낼 수 있습니다. 계가 초기 조건에 민감하다면, 시간이 지남에 따라 $d(t)$는 지수적인 비율로 커지거나 작아질 것입니다. 따라서, 다음과 같이 다시 쓸 수 있습니다:

$$d(t) \approx d(0)e^{\lambda t}$$

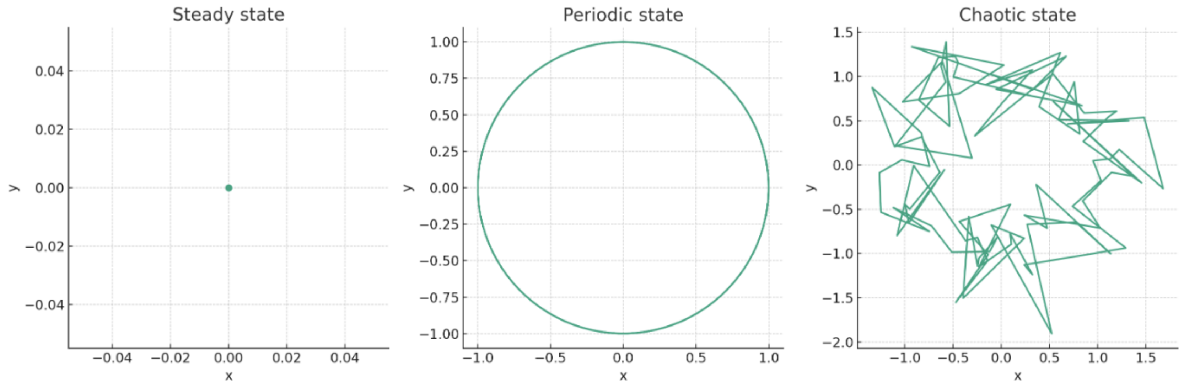
여기서 $\lambda$는 랴푸노프 지수입니다. 여기서, 우리는 지수 근사를 취할 수 있을 만큼 $d(0)$이 충분히 작다고 가정합니다. 그러면, 자연로그를 취하여, 랴푸노프 지수가 다음과 같이 쓰일 수 있음을 알 수 있습니다:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{d(t)}{d(0)}\right)$$

로렌츠 계에서 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$이므로, 계를 세 방향 모두에서 특징짓는 3개의 랴푸노프 지수 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$이 존재할 것입니다. 우리는 보통 최대 랴푸노프 지수(Maximum Lyapunov Exponent, MLE)에 가장 관심이 있는데, 그것이 계 자체에 대해 많은 것을 말해 주기 때문입니다.

- 랴푸노프 지수가 양수($\lambda > 0$)이면, 궤적이 평균적으로 발산하며($e^{\lambda t}$가 무한대로 접근하므로) 계는 혼돈적입니다.
- 음수($\lambda < 0$)이면, 궤적이 평균적으로 수렴하며($e^{-\lambda t}$가 0으로 접근하므로) 계는 안정합니다.
- 0($\lambda = 0$)이면, 궤적이 평균적으로 수렴하지도 발산하지도 않으며($e^0 = 1$이므로), 중립적이거나 한 계적으로 주기적인 안정한 계임을 나타냅니다.

아래에, 관련 없는 한 계와 그에 대응하는 MLE에 대한 거동의 그래프를 보입니다.




**문제 3**
다음 매개변수의 로렌츠 계에 대해 최대 랴푸노프 지수(MLE)를 계산하십시오:

- $\sigma = 15.6$
- $\rho = 35.4$
- $\beta = 3.13$

이것은 계에 대해 무엇을 의미합니까? 불확실도를 추정할 수 있는지 시도해 보십시오!

**문제 4**
시뮬레이션이 실제의 99%까지 정확한 최대 시간을 $T_{\text{max}}$라 부릅시다. 시뮬레이션은 특정 수치 풀이기(numerical solver)와 시간 간격 $dt$로 특징지어집니다.
rk4_step을 사용하여, 초기점 $(1, 1, 1)$이 주어졌을 때 다양한 $dt$ 값에서 $T_{\text{max}}$를 추정하십시오. 그래프를 그리십시오.
그런 다음 rk2_step으로 같은 것을 하십시오. 어떤 차이를 발견합니까?

**문제 5**
$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$이라 합시다. 평균 각진동수 $\omega_0$은 얼마입니까? 불확실도와 함께 보고하십시오. 이것은 위치에 따라 어떻게 변합니까?