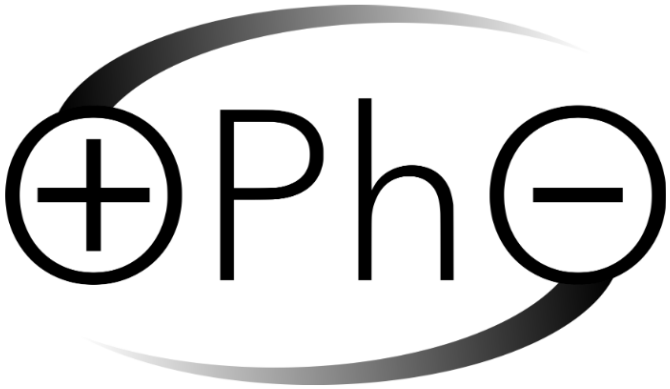
2025 온라인 물리 올림피아드:
초청 라운드



제II부 해설

후원사

물리학, 수학, 교육 분야에서 활약하는 후원사들의 도움 덕분에 이 대회를 열 수 있었습니다.













실험 문제 [15점] — 해설

축구의 기술 [15점]

공식 해설은 공개되지 않았으며 주최 측 실행 파일 `magnus`도 구할 수 없었다. 이 해설에는 같은 모형으로 만든 HaslaLab 시뮬레이터의 웹 및 Python 버전에서 얻은 자료를 사용했다. 숨은 값은 HaslaLab에서 정했다. 시뮬레이터는 주최 측 프로그램처럼 v_0, θ_0, ω_0에 문제지에 적힌 크기의 무작위 오차를 더하고 카메라가 찍은 점 (x, y)를 1 cm 단위로 반올림한다.

운동 방정식. 바람이 x 방향으로 불 때 공기에 대한 공의 상대 속도를 $\vec{u} = (\dot{x} - v_w,\ \dot{y})$라 하자.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -k|\vec{u}|u_x - \frac{Kr\omega}{m}u_y, \\ \ddot{y} &= -k|\vec{u}|u_y + \frac{Kr\omega}{m}u_x - g, \qquad k = \frac{\rho C_d A}{2m}, \\ \dot{\omega} &= -B\omega|\vec{u}|, \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $A = \pi r^2 = 0.0380\ \mathrm{m^2}$, $m = 0.430\ \mathrm{kg}$, $C_d = 0.47$이다. 파일에는 시간 정보 없이 점의 순서만 들어 있으므로 n번째 점의 시각은 $t_n = n/r_c$이다. 마지막 점은 프레임이 아닌 착지점이므로 맞춤에서 제외한다.

1. 카메라 프레임률 r_c [0.8점]

공을 빠르고 낮게($v_0 = 40\ \mathrm{m/s}$, $\theta_0 = 10^\circ$, $\omega_0 = 0$) 차면 첫 프레임 동안의 변위는 거의 v_0/r_c이다. 처음 두 변위 s_1과 s_2로부터 $t = 0$에서의 $s_0 \approx \frac{3}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2$를 외삽하면 항력 효과가 제거된다. 따라서

$$r_c = \frac{v_0}{s_0}. \tag{2}$$

20회 측정 평균은 24.02 Hz, 한 번의 산포는 0.32 Hz다. 이는 $0.5/40 = 1.3\%$인 v_0의 불확실성에 부합한다. 따라서 $r_c = 24.0 \pm 0.1$ Hz다. 프레임률은 정수이므로 이후에는 오른쪽 값을 쓴다.

$$\boxed{r_c = 24\ \mathrm{Hz}}$$

2. 회전이 없을 때: 바람 속력 v_w [2점], 공기 밀도 ρ [2.6점], 중력 가속도 g [2.6점]

$\omega_0 = 0$이면 회전이 없으므로 식 (1)의 마그누스 항이 사라진다. 미지수는 v_w, ρ, g이다. $v_0 \in \{15, 25, 35\}\ \mathrm{m/s}$와 $\theta_0 \in \{30^\circ, 50^\circ, 70^\circ\}$의 조합으로 공을 아홉 번 차고 모든 궤적을 최소제곱법으로 함께 맞췄다. 실제 발사 속력과 각도가 입력값과 다르므로 각 궤적의 v_0과 θ_0도 자유 매개변수로 두었다. 공통 매개변수는 세 개, 궤적마다 두 개다. 잔차의 제곱평균제곱근은 6–8 mm로, 1 cm 단위의 반올림과 카메라 잡음에서 예상되는 값이다.

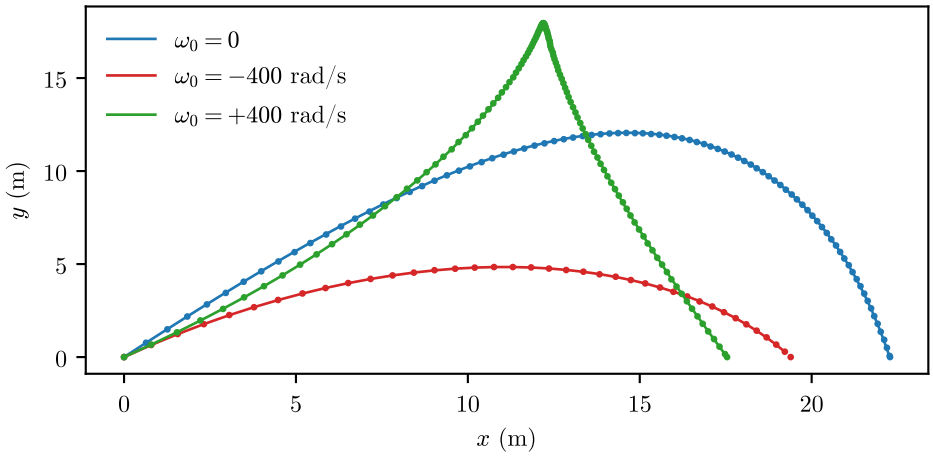
세 값을 구별할 수 있는 이유는 항력이 상대 속도에 따라 달라지기 때문이다. 바람은 낮고 긴 궤적과 높은 궤적에 서로 다른 영향을 준다. 높은 궤적에서는 꼭대기 부근의 공이 옆으로 밀린다. ρ는 속력이 커질수록 더 강한 감속을 일으키고, g에 의한 아래쪽 가속도는 속력과 무관하다. 새로 공을 차서 이 절차를 다섯 번 반복하면 다음 평균과 표준편차를 얻는다.

$$v_w = -2.601 \pm 0.004\ \mathrm{m/s}, \qquad \rho = 1.620 \pm 0.001\ \mathrm{kg/m^3}, \qquad g = 7.346 \pm 0.002\ \mathrm{m/s^2}. \tag{3}$$

$v_w < 0$이므로 바람은 발사 반대인 $-x$ 방향으로 2.60 m/s의 속력으로 분다.

3. 회전할 때: 마그누스 계수 K [3점], 관성 계수 B [4점]

v_w, ρ, g를 고정하고 회전하는 공의 궤적 여섯 개를 맞췄다. 첫 조합은 $\omega_0 = \pm 250$, ± 400 rad/s, $v_0 = 25$ m/s, $\theta_0 = 40°$이고, 두 번째는 $v_0 = 35$ m/s, $\theta_0 = 30°$, $\omega_0 = \pm 400$ rad/s이다. 각 궤적의 v_0, θ_0, ω_0는 자유 매개변수로 두되, ω_0에는 입력값 주변 ± 1 rad/s의 알려진 오차를 반영한다. 발사 순간 마그누스 힘은 $K\omega_0$에만 의존하므로 알려진 ω_0가 K의 크기 척도를 정한다. 한편 B는 $\omega = \omega_0 \exp(-B\int |\vec{u}|\,dt)$에 따라 회전이 줄면서 궤적의 굽음이 얼마나 약해지는지로 결정된다. 따라서 회전이 크고 비행이 길수록 유리하다.



그림은 전형적인 맞춤 결과이다. 점은 시뮬레이터 자료이고 선은 맞춘 모형이다. 백스핀($\omega_0 = +400$ rad/s)은 공을 가파르게 띄우고, 톱스핀($\omega_0 = -400$ rad/s)은 낮게 날아가게 한다. 다섯 번 반복한 결과는 다음과 같다.

$$K = (6.206 \pm 0.004) \times 10^{-3}\ \text{kg/m}, \qquad B = (1.154 \pm 0.003) \times 10^{-2}\ \text{m}^{-1}, \tag{4}$$

단위는 $F = Kr\omega v$과 $\dot{\omega} = -B\omega v$에서 얻는다.

결과

물리량		측정값	시뮬레이터의 숨은 값
바람 속력	v_w	-2.601 ± 0.004 m/s	-2.6 m/s
공기 밀도	ρ	1.620 ± 0.001 kg/m³	1.62 kg/m³
중력 가속도	g	7.346 ± 0.002 m/s²	7.35 m/s²
프레임률	r_c	24 Hz	24 Hz
마그누스 계수	K	$(6.206 \pm 0.004) \times 10^{-3}$ kg/m	6.2×10^{-3} kg/m
관성 계수	B	$(1.154 \pm 0.003) \times 10^{-2}$ m⁻¹	1.15×10^{-2} m⁻¹

모든 값은 시뮬레이터의 숨은 값과 표준편차 두 배 이내에서 일치한다.

채점 기준 예시(HaslaLab 제안).

- v_w: [1점] 상대 속도로 항력을 씀. [1점] ± 0.1 m/s 이내.
- ρ와 g 각각: [1.6점] 발사 오차를 자유 매개변수로 둔 맞춤. [1점] $\pm 2\%$ 이내.
- r_c: [0.4점] 알려진 v_0로 시간 척도를 고정함. [0.4점] 24 Hz.
- K: [2점] 알려진 ω_0로 $K\omega_0$의 크기 척도를 고정함. [1점] $\pm 3\%$ 이내.
- B: [2.5점] 곡률 변화로 회전 감쇠를 맞춤. [1.5점] $\pm 5\%$ 이내.