3 시뮬레이션 실험

23.빙글빙글 스핀

전자의 스핀과 자기 모멘트의 관계는 $\boldsymbol{m} = -g\mu_B \boldsymbol{S}$이다. 여기서 μ_B는 보어 마그네톤, g는 전자의 환경에 따라 달라지는 무차원 인자이다. $\boldsymbol{S}$는 크기가 $\frac{1}{2}$인 벡터이다. 전자의 각운동량은 $\hbar\boldsymbol{S}$이다.

전자 스핀 $N = 100000$개가 길이 2인 막대를 따라 거의 균일하게 분포한다. 막대는 x 방향을 향하고, 왼쪽 끝의 좌표는 $\boldsymbol{\xi} = -1$, 오른쪽 끝의 좌표는 $\boldsymbol{\xi} = 1$이다. 막대의 자기장은 z 방향이며 $B_z = B_0 + B_1\xi$로 주어진다. B_0는 $0.01T$ 정도이며, $B_1 \ll B_0$이다. 균일한 바이어스 자기장 $\boldsymbol{B} = b\hat{z}$를 추가할 수 있지만, 예산상 그 크기는 $0.01T$로 제한된다.

스핀을 열저장고에 넣어 열평형에 이르게 한다. 초기에는 볼츠만 분포에 따라 스핀이 자기장과 평행하거나 반평행하게 정렬한다. 시각 $t = 0$에 강한 자기장 펄스를 가해 모든 스핀을 y축 둘레로 반시계 방향으로 90° 회전시킨다. 센서를 설정해 원하는 시각에 x축 및 y축 방향의 총자화를 측정할 수 있다. 측정값은 편의상 μ_B 단위로 주어지며 잡음이 섞인다! 초기 자기장 펄스로 인한 손상을 막는 보호 회로 때문에 $t = 100\text{ns}$ 이전에는 기록이 없다. $t = 10000\text{ns}$ 이후에도 측정 회로의 메모리가 가득 차 기록이 멈춘다.

g와 B_0는 오차 5% 이내로, B_1은 오차 15% 이내로 구하라. 자기장은 테슬라로 나타내라. $t = 0$ 이후에는 스핀이 주변 환경이나 다른 스핀과 상호작용하지 않는다고 가정해도 좋다.

풀이 23: 각 스핀의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d(\hbar\boldsymbol{S})}{dt} = (-g\mu_B\boldsymbol{S}) \times \boldsymbol{B} = g\mu_B\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{S}$$

따라서 스핀은 라모어 각진동수 $\omega_L = \frac{g\mu_B B}{\hbar}$로 회전한다. $B_0 \gg B_1$이므로 B_0+b가 0에 가깝지 않다면 세차 운동은 주로 중심값 B_0+b에 해당하는 진동수로 일어난다. 정확한 진동수를 얻으려면 1-ns 간격으로 측정해 $\arctan\frac{M_y}{M_x}$로 위상을 추정한다. 여러 프로그래밍 언어의 atan2 함수를 쓰면 편리하다. 위상이 π에서 $-\pi$로 갑자기 뛰는 곳에 2π의 정수배를 더해 위상을 연속으로 잇는다. 위상을 직선에 맞추면 주어진 b에 대한 라모어 각진동수를 구할 수 있다. 여러 b에서 반복해 라모어 각진동수를 b에 대해 그리면 기울기는 $\frac{g\mu_B}{\hbar}$, y절편은 $\frac{g\mu_B}{\hbar}B_0$이다. 또는 볼츠만 인자가 작아 신호가 최소가 되는 b를 골라 B_0를 구할 수도 있지만 조금 덜 정확하다. 얻어야 할 값은 $g = 1.83$과 $B_0 = 5.27\text{mT}$이다.

B_1은 진동의 포락선을 변조한다. 문제의 조건에서 B_0+b가 0에 가까워지도록 b를 고르지 않는 한, B_1이 스핀의 볼츠만 분포에 미치는 영향은 작으므로 무시해도 된다. 그래도 $b = 0.01\text{T}$로 두면 볼츠만 인자가 더 커져 신호가 강해지므로 이 편이 안전하다. $\Delta\omega \equiv \frac{g\mu_B}{\hbar}$로 정의한다. 물질 전체의 자화가 일정하다고 보면 포락선의 시간 변화를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$M_x \propto \int_{-1}^{1} \cos(\omega + \Delta\omega\xi)t \, d\xi = \frac{1}{\Delta\omega t}\left(\sin(\omega+\Delta\omega)t - \sin(\omega-\Delta\omega)t\right) \propto \frac{\sin\Delta\omega t}{\Delta\omega t}\cos\omega t$$

M_y에도 같은 계산을 적용하면 포락선이 $\frac{\sin\Delta\omega t}{\Delta\omega t}$ 꼴임을 알 수 있다. 첫 영점은 $\frac{\pi}{\Delta\omega}$에 있으므로, 이를 통해 $\Delta\omega$와 B_1을 구할 수 있다. 앙상블을 여러 번 초기화해 첫 최솟값의 시각을 재고 평균하면 B_1의 추정값과 표준오차를 얻을 수 있다. 얻어야 할 값은 $B_1 = 73\mu\mathrm{T}$이다. 잡음과 계산에 사용한 근사 때문에 뒤쪽 영점에는 계통 오차가 생기기 쉬우므로 영점을 더 많이 쓰는 편이 유리하지는 않다. 곡선 맞춤 도구로 M의 크기를 직접 싱크 곡선에 맞추는 방법도 타당하다.