AAPT UNITED STATES PHYSICS TEAM
AIP 2022

실험 대표 선발 시험

제한 시간 3시간

올해는 실험실에서 실제 실험을 할 수 없었기 때문에, 대표 선발에 쓰이던 실험들을 이 하나의 시뮬레이션 실험으로 대신한다.

미래 원형 충돌기 (The Future Circular Collider)

1 안전 경고

이 실험에는 특별히 주의할 안전 문제가 없다.

2 개요

입자 물리학자, 응집 물질 물리학자, 원자 물리학자, 화학자 모두 산란 실험으로 물질의 구조를 들여다본다. 이런 실험에서는 입자를 다른 입자에 부딪친 다음, 무엇이 나오는지 보고 충돌 중에 무슨 일이 일어났는지 추론한다. 이 실험에서 여러분은 이 전통을 이어, 정해진 초기 조건에서 수평 탁자 위를 미끄러지는 원판들의 충돌을 시뮬레이션하여 분석한다. 원판은 항상 탁자 위에 납작하게 놓여 있고, 탁자에는 마찰이 없다. 시뮬레이션에서 물체 사이의 충돌은 다음 규칙을 따른다.

- 법선 방향의 상대 속도는 부호가 바뀌고 반발 계수 c가 곱해진다. 완전 탄성 충돌이면 $c = 1$이다.
- 접선 방향의 상대 속도는 보통의 방식으로 마찰에 의해 바뀐다. 상대 속도가 0이면 정지 마찰이 그것을 0으로 유지하려 하고, 0이 아니면 운동 마찰력 μN이 그것을 0 쪽으로 민다. 여기서 N은 수직항력이다.

요구된 매개변수를 얻는 방법은 여러 가지이므로, 채점은 주로 결과의 정밀도와 정확도로 한다. 여러분이 정하는 초기 조건에는 고유한 절대 불확도와 상대 불확도가 함께 붙으므로, 적절한 값을 고르고 여러 번 시행하여 정확한 결과를 얻어야 한다. **모든 부분에 불확도 추정이 필요하다.** 다만 실험을 어떻게 하느냐에 따라 각 소문항에 그래프가 필요할 수도 있고 필요 없을 수도 있다. 늘 그렇듯이, 결과를 어떻게 얻었는지 보이는 데 필요한 그림, 뒷받침하는 계산과 그 밖의 정보를 보고서에 모두 포함하라.

Copyright ©2022 American Association of Physics Teachers

3 장비

이것은 물리적 장비가 전혀 없는 순수한 시뮬레이션 실험이다. 필요한 것은 충돌을 시뮬레이션하는 `collision-black-box` 프로그램뿐이며, 여기에서 내려받을 수 있다.

프로그램을 실행하는 방법은 운영체제에 따라 다르다. Windows에서는 다음과 같다.

- 시작 메뉴에서 **powershell**을 검색해 실행하여 터미널을 연다. 실험 전체를 이 터미널에 명령을 입력하여 진행한다.
- `cd <path-to-folder>`를 실행하여 내려받은 `collision-black-box` 프로그램이 있는 폴더로 이동한다. 대부분의 컴퓨터에서는 `cd ~/Downloads`가 맞는 명령이다.
- 실험의 첫 번째 부분은 `collision-black-box-windows.exe wall`로, 두 번째 부분은 `collision-black-box-windows.exe disk`로 실행한다.

macOS에서는 절차가 조금 더 복잡하다.

- 터미널(Terminal) 앱을 실행한다. 실험 전체를 이 터미널에 명령을 입력하여 진행한다.
- `cd <path-to-folder>`를 실행하여 내려받은 `collision-black-box` 프로그램이 있는 폴더로 이동한다. 대부분의 컴퓨터에서는 `cd ~/Downloads`가 맞는 명령이다.
- `chmod +x collision-black-box-macos`를 실행하여 파일을 실행 가능한 프로그램으로 표시한다.
- `open .`을 실행하여 현재 폴더를 Finder에서 연다. Finder에서 `collision-black-box` 프로그램을 control-클릭하여 메뉴를 열고 **열기**를 선택한다. 나타나는 대화 상자에서 확인한다. 다른 터미널 창이 잠깐 나타났다 사라질 것이다. 이제 프로그램에 실행 권한이 주어졌다.
- 터미널로 돌아와 실험의 첫 번째 부분은 `./collision-black-box-macos wall`로, 두 번째 부분은 `./collision-black-box-macos disk`로 실행한다.

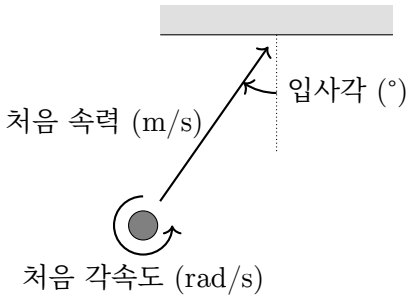
Copyright ©2022 American Association of Physics Teachers

4 실험

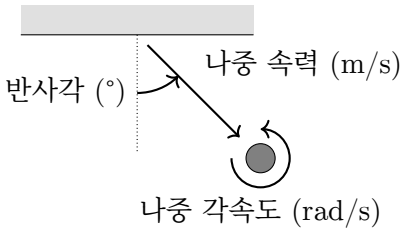
4.1 벽과의 충돌

이 부분에서는 질량 M, 반지름 R, 관성 모멘트 $I = \beta MR^2$인 원판을 고정된 긴 수직 벽을 향해 발사한다. 원판의 처음 속력과 반시계 방향 각속도, 그리고 처음 속도가 벽의 법선과 이루는 입사각을 정한다. 프로그램은 충돌을 시뮬레이션하여 충돌 후의 이 매개변수 값들을 돌려준다.

입력하는 값:



프로그램이 돌려주는 값:



정하는 매개변수는 다음 범위 안에 있어야 한다.

- $0.5\,\mathrm{m/s} \le$ 처음 속력 $\le 10\,\mathrm{m/s}$.
- $-50\,\mathrm{rad/s} \le$ 처음 각속도 $\le 50\,\mathrm{rad/s}$.
- $0^\circ \le$ 입사각 $\le 75^\circ$.

원판 발사 장치의 불완전함을 흉내 내기 위해, 정한 초기값에는 항상 다음 불확도가 붙는다.

- 처음 속력: 상대 불확도 5%와 절대 불확도 0.05 m/s가 겹쳐 붙는다.
- 처음 각속도: 상대 불확도 5%와 절대 불확도 0.2 rad/s가 겹쳐 붙는다.
- 입사각: 절대 불확도 1°.

1. (a)원판과 벽 사이의 반발 계수 c를 구하라.
   (b)원판의 반지름 R과, μ, β의 값을 구하라.

풀이

각 매개변수에 대해, 괜찮은 최종 결과라면 중심값이 다음 범위 안에 있어야 한다.

$$c = 0.70 \pm 0.02,$$
$$\mu = 0.43 \pm 0.02,$$
$$R = (0.350 \pm 0.005)\,\mathrm{m},$$
$$\beta = 0.80 \pm 0.03.$$

또한 좋은 측정 절차와 합리적인 불확도 추정이 필요하다. 여러분의 불확도는 위의 값과 비슷하거나, 좋은 측정을 많이 했다면 더 작아야 한다. 동시에 과신해서도 안 된다. 즉 참값이 여러분의 범위에서 멀리 벗어날 만큼 작아서는 안 된다. 오차 분석은 나중에 다루고, 먼저 문제를 일반적으로 분석하자.

Copyright ©2022 American Association of Physics Teachers

벽이 x축을 따라 놓여 있어 법선 방향이 y축이라 하자. 처음 양과 나중 양을 각각 프라임이 없는 변수와 있는 변수로 나타내면

$$v_x = v\sin\theta, \qquad v_y = v\cos\theta, \qquad v'_x = v'\sin\theta', \qquad v'_y = v'\cos\theta'.$$

정의에 따라 반발 계수는 다음을 만족한다.

$$v'_y = cv_y.$$

마찰에 의한 접선 방향 충격량 J_x는 v_x와 ω를 모두 바꾼다.

$$J_x = M(v'_x - v_x), \qquad J_xR = \beta MR^2(\omega - \omega').$$

충돌이 끝날 때까지 원판이 벽에 대해 미끄러지기를 멈추면 $v'_x = R\omega'$이므로

$$\begin{aligned} J_x &= M(v'_x - v_x), \\ J_x &= \beta M(R\omega - v'_x), \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad J_x = \frac{\beta}{1+\beta}M(R\omega - v_x).$$

충돌하는 동안 내내 미끄러지면, 마찰은 충격량 $J_x = \pm\mu J_y$(부호는 미끄러지는 방향에 따라 다름)를 준다. 여기서 J_y는 법선 방향 충격량이다.

$$J_y = M(v_y + v'_y) = Mv_y(1+c).$$

따라서 수평 속도의 변화는

$$v'_x - v_x = \frac{J_x}{M} = \begin{cases} \dfrac{\beta}{1+\beta}(R\omega - v_x) & \text{미끄러짐이 멈출 때,} \\ \mu v_y(1+c) & \text{내내 미끄러질 때,} \end{cases}$$

이고, $\omega' - \omega = (v'_x - v_x)/\beta R$에 대해서도 비슷한 결과가 나온다.

이제 무작위로 고른 v, θ, ω로 자료를 잔뜩 모은 다음 자료에 맞는 매개변수를 찾을 수도 있지만, 이는 손이 많이 가고 그다지 효율적이지 않다. 먼저 각 매개변수를 어떻게 뽑아낼지 개념적으로 생각하는 것이 낫다.

- 세 입력 매개변수를 모두 일반적인 값으로 쓸 필요는 없다. 항상 $\theta = 0$을 써도 문제를 풀기에 충분한 정보가 있다. 이때 위의 결과는 다음과 같이 된다.

  $$v'_y = cv, \qquad v'_x = \begin{cases} \dfrac{\beta}{1+\beta}(R\omega) & \text{미끄러짐이 멈출 때,} \\ \mu v(1+c) & \text{내내 미끄러질 때.} \end{cases}$$

  다른 방법도 많다. 예를 들어 $\omega = 0$으로 고정하고도 문제를 풀 수 있다.

- μ는 원판이 내내 미끄러질 때만, R은 미끄러짐이 멈출 때만 중요하다. $\theta = 0$에서 이 두 경우는 각각 ω/v가 클 때와 작을 때에 해당한다. 두 경우를 모두 조사해야 하지만, 그 경계가 어디인지는 미리 알 수 없다.

- ω를 크게, v를 아주 작게 하면 원판이 항상 미끄러지게 할 수 있고, 반대로 하면 미끄러짐이 멈추게 할 수 있다. 하지만 v와 ω를 작게 하는 것은 피해야 한다. 이 경우 각 입력 매개변수의 절대 불확도가 큰 상대 불확도가 되어 결과가 부정확해지기 때문이다.

이를 염두에 두면 다음과 같이 풀 수 있다.

- c를 구하려면 $\omega = \theta = 0$, $v = 10$ m/s로 두고 $c = v'/v$를 계산한다. 여러 번 시행한 결과를 평균하고, 그 흩어짐으로 불확도를 추정한다. (이것은 작은 ω여서 ω의 상대 불확도가 매우 크지만, 결과에 영향을 주지 않으므로 괜찮다.)

Copyright ©2022 American Association of Physics Teachers

v'과 v가 비례하므로 v를 바꿔 가며 v' 대 v를 그리고 직선의 기울기 c를 구할 수도 있다. 하지만 이는 실제로 쓸모가 없다. 앞에서 말했듯이 작은 v의 측정은 확실히 더 나쁘기 때문이다. (또 시뮬레이션은 충돌이 일어나는 데 걸리는 시간도 따지므로, 이런 자료점은 얻는 데 더 오래 걸린다.) 직선을 그리는 것은 알 수 없는 절편을 없애거나 두 매개변수를 한꺼번에 구하고 싶을 때 쓸모가 있는데, 여기는 둘 다 해당하지 않는다.

- 계속 $\theta = 0$으로 두고, 큰 v와 ω로 실험하여 충돌 중에 원판의 미끄러짐이 언제 멈추는지 알아본다. (이는 쉽게 알 수 있다. 미끄러짐이 멈추면 v'_x가 v와 무관하고, 내내 미끄러지면 v'_x가 ω와 무관하다.)
- v와 ω가 크지만 내내 미끄러지는 매개변수, 예를 들어 $v = 8$ m/s, $\omega = 50$ rad/s를 골라

  $$\mu = \frac{v'_x}{v(1+c)}$$

  를 계산한다. 이번에도 여러 번 시행한 결과를 평균하고, 흩어짐으로 불확도를 추정한다.
- 미끄러짐이 멈추는 매개변수, 예를 들어 $v = 10$ m/s, $\omega = 30$ rad/s를 골라

  $$R = \frac{v'_x}{\omega'}, \qquad \beta = \frac{\omega'}{\omega - \omega'}$$

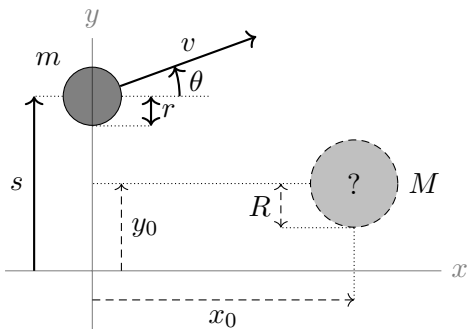
  를 계산한다. 이번에도 여러 번 시행한 결과를 평균하고, 흩어짐으로 불확도를 추정한다.

이것은 빠르고 효율적인 한 가지 방법이지만, 다른 방법도 많다. 예를 들어 R을 구하려면, 0이 아닌 음의 θ를 고정하고 $\omega' = \omega$가 될 때까지 ω를 조정해 볼 수 있다. 이것은 원판과 벽 사이에 접선 방향의 상대 속도가 없을 때 일어난다. 직선을 그려서 매개변수를 구할 수도 있다.

Copyright ©2022 American Association of Physics Teachers

4.2 원판과의 충돌

이 부분에서는 "탐사" 원판을 탁자 위의 숨겨진 두 번째 원판을 향해 발사한다. 숨겨진 원판은 질량 M, 반지름 R이며, 중심이 알려지지 않은 위치 (x_0, y_0)(단, $x_0 > 0$)에 놓인 채 정지해 있다. 탐사 원판의 반지름은 $r = (0.250 \pm 0.001)\,\mathrm{m}$이지만, 질량 m, 처음 위치 $(0, s)$, 처음 속력 v, 처음 속도의 방향 θ(수평과 이루는 각)는 여러분이 정한다. 두 원판 모두 마찰이 없으므로 회전은 상관없다. 프로그램은 충돌이 일어나면 그것을 시뮬레이션하여 탐사 원판의 나중 속도(속력과 각도)를 돌려준다.



정하는 매개변수는 다음 범위 안에 있어야 한다.

- $1\,\mathrm{kg} \le m \le 5\,\mathrm{kg}$.
- $-2\,\mathrm{m} \le s \le 2\,\mathrm{m}$.
- $0.5\,\mathrm{m/s} \le v \le 10.0\,\mathrm{m/s}$.
- $-90^\circ \le \theta \le 90^\circ$.

정하는 매개변수에는 다음 불확도가 붙는다.

- m: 상대 1%와 절대 0.05 kg.
- s: 절대 2 mm.
- v: 상대 1%와 절대 0.05 m/s.
- θ: 절대 0.1°.

2. (a) 숨겨진 원판의 처음 위치 (x_0, y_0)를 구하라.
   (b) 숨겨진 원판의 반지름 R을 구하라.
   (c) 숨겨진 원판의 질량 M과, 두 원판 사이의 반발 계수 c를 구하라.

풀이

여기서는 모든 부분에서 항상 $v = 10$ m/s를 쓰는 것이 좋다. 앞에서 말했듯이 이는 v의 절대 불확도의 영향을 줄이고, 시뮬레이션도 더 빨리 돌게 한다. 처음 두 부분에서는 탐사 원판이 뒤로 튕겨 나오지 않도록 m을 크게 고르는 것도 좋다. 그러면 상황이 덜 헷갈린다.

(a) 처음에는 숨겨진 원판이 어디 있는지 전혀 모른다. 원판을 찾으려면 $\theta = 0$으로 두고 처음으로 맞을 때까지 s를 r 간격으로 바꿔 보는 것이 가장 쉽다. 몇 번이면 충분하다.

Copyright ©2022 American Association of Physics Teachers

이제 $\theta' = 0$, 즉 정면충돌이 될 때까지 s를 조정하여 원판의 세로 위치 y_0를 찾는다. 입력 매개변수의 불확도가 θ'에 영향을 주므로 여러 번 시행해야 한다. 관심 영역에서 s 대 θ'을 그리고, 흩어진 자료에 직선을 그어 $\theta' = 0$과 만나는 곳을 보면 y_0를 구할 수 있다. (시간이 부족하면 이렇게 한다고 상상하며 자료에서 바로 눈대중으로 답을 읽어도 된다.) 어느 경우든 좋은 최종 결과는 다음과 같다.

$$y_0 = (-1.230 \pm 0.003)\,\mathrm{m}.$$

x_0를 구하려면 탐사 원판을 옆에서 맞혀 볼 수 있다. 예를 들어 계산을 간단히 하려고 $\theta = 45°$로 두고, 원판이 다시 맞을 때까지 s를 바꾼다. 그런 다음 다시 정면충돌을 뜻하는 $\theta' = \theta$가 될 때까지 s를 조정하고, $x_0 = y_0 - s$를 구한다. 좋은 최종 결과는 다음과 같다.

$$x_0 = (0.696 \pm 0.003)\,\mathrm{m}.$$

두 경우 모두 불확도를 해석적으로 추정하는 간단한 방법은 없지만, 자료를 살펴보면 비슷한 결과를 얻을 수 있을 것이다.

(b) 가장 쉬운 방법은 $\theta = 0$으로 두고 여러 Δs 값에 대해 $s = y_0 + \Delta s$에서 쏘는 것이다. 충돌은 $|\Delta s| \le r + R$일 때 일어나므로, 충돌이 대략 절반쯤 일어나는 지점에 이를 때까지 $|\Delta s|$를 조정한다. 좋은 최종 결과는 다음과 같다.

$$R = (0.145 \pm 0.002)\,\mathrm{m}.$$

여러 학생이 탐사 원판의 반지름 r을 빼는 것을 잊었다. 또 r의 불확도를 제곱합으로 더해야 하므로, 최종 R의 불확도는 0.001 m보다 작을 수 없다는 점에 유의하라.

(c) 간단히 하기 위해 정면충돌 $\theta = 0$, $s = y_0$을 생각하고 m을 바꾼다. 충돌을 풀면

$$v' = v - \frac{Mv}{M+m}(1+c).$$

M과 c를 따로 떼어 낼 수 없으므로, 이 부분에서는 직선을 그려야 한다.

$$\frac{v}{v-v'} = \frac{1}{1+c}\frac{m}{M} + \frac{1}{1+c}$$

임에 유의하라. 따라서 $v/(v-v')$ 대 m을 그리면 기울기가 $1/(M(1+c))$, 절편이 $1/(1+c)$인 직선이 된다. (반사각 $\theta' \approx 180°$는 여기서 음의 v'에 해당한다.) 좋은 최종 결과는 다음과 같다.

$$M = (1.41 \pm 0.07)\,\mathrm{kg}, \qquad c = 0.85 \pm 0.05$$

불확도는 가능한 최적 직선들의 집합으로 추정할 수 있다.

이 시뮬레이션 실험에서 몇 가지 중요한 실용적 교훈을 얻었기를 바란다. 첫째, 결과를 효율적으로 얻으려면 계획을 정하기 전에 매개변수 공간을 탐색해 보는 것이 도움이 될 때가 많다. 둘째, 가능한 가장 일반적인 결과를 해석적으로 계산하는 것은 대개 쓸모가 없다. 가장 좋은 계획은 대개 단순하고 물리적으로 직관적이며, 매개변수 공간의 특별한 영역에 집중한다. 마지막으로, 표준적인 불확도 전파 공식도 중요하지만 불확도를 추정하는 다른 방법도 많다.

Copyright ©2022 American Association of Physics Teachers